ЛЕКЦИЯ 15

7. Неопределенный интеграл

7.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Основная задача интегрального исчисления

$$f(x) \to F(x):\ F'(x) = f(x) \vee dF(x) = f(x)dx.$$

Определение 7.1. Функция $F(x)$ $x \in X \subset R$ называется ***первообразной для функции*** $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема $\forall x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Пример 102. Найти какую-нибудь первообразную для функции $f(x)=\sin x$.

Решение. $\boldsymbol{f(x)=\sin x \Rightarrow F(x)=-\cos x}$, т.к.

$$\boldsymbol{F'(x)=(-\cos x)'=\sin x \vee dF(x)=d(-\cos x)=\sin x dx}.$$

Теорема 7.1. Любая, непрерывная на отрезке $[a,b]$, функция $\boldsymbol{f(x)}$ имеет на $[a,b]$ первообразную $\boldsymbol{F(x)}$.

Теорема 7.2. Если $\boldsymbol{F_1(x)}$ и $\boldsymbol{F_2(x)}$ - две различные первообразные одной и той же функции $\boldsymbol{f(x)}$ на множестве X, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым C

$$\boldsymbol{F_2(x)=F_1(x)+C}.$$

Следствие. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой $f(x)$ определяются выражением $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Пример 103. $f(x)=e^{3x} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$. Но и функция $\frac{1}{3}e^{3x}+C$ будет первообразной, где C- произвольная постоянная.

Операция отыскания первообразной $F(x)$ называется ***интегрированием***.

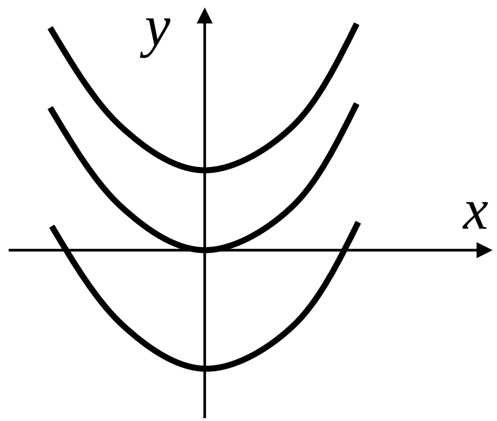
Определение 7.2. Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Неопределенный интеграл – функция, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

Пример 104. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad d(\operatorname{tg} x + C) = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Неопределенный интеграл – однопараметрическое семейство кривых $\boldsymbol{F(x)+C}$ (C – параметр): все касательные к кривым в точке $\boldsymbol{x_0}$ параллельны между собой. $\boldsymbol{(F(x)+C)'\big|_{x=x_0}=F'(x_0)=f(x_0)}$.



Пример 105. $\boldsymbol{F(x)=x^2+C=\int 2x\,dx}$.

Кривые семейства $\boldsymbol{F(x)+C}$ называются интегральными кривыми. Они не пересекаются, не касаются друг друга. Через каждую точку проходит одна интегральная кривая. Получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.

7.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство. $dF(x) = F'(x)dx \Rightarrow \int F'(x)dx = F(x) + C$.

Пример 106. $\int 2xe^{x^2}dx = \int d\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} + C$.

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad a \neq 0$.

Доказательство. $F(x)$- первообразная $f(x)$: $F'(x) = f(x) \Rightarrow aF(x)$- первообразная $af(x)$: $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$.

$$4)\ \int (f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

Доказательство. $F_1(x) + C_1 = \int f_1(x)dx$; $\quad F_n(x) + C_n = \int f_n(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) = f_1(x)$; $\ (F_n(x))' = f_n(x) \Rightarrow F_1(x) \pm F_n(x)$ является первообразной $f_1(x) \pm f_n(x) \Rightarrow \int f_1(x)dx \pm \int f_n(x)dx = (F_1(x) + C_1) \pm (F_n(x) + C_n) =$

$$= (F_1(x) \pm F_n(x)) + (C_1 \pm C_n) = (F_1(x) \pm F_n(x)) + C = \int (f_1(x) \pm f_n(x))dx.$$

$$5)\ \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Доказательство. $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = f(ax+b).$

6) Инвариантность формул интегрирования

Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u -дифференцируемая функция ($u = u(x)$).

7.3. Таблица основных правил и формул интегрирования

Свойства 1-6 и таблица неопределенных интегралов – основные правила интегрального исчисления.

Таблица основных формул интегрирования получается из таблицы производных элементарных функций при чтении справа налево.

Основные правила

1) $\left(\int f(u)du\right)' = f(u) \quad u = x \vee u = f(x),$

2) $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du,$

3) $\int dF(u) = F(u) + C,$

4) $\int af(u)du = a\int f(u)du,$

5) $\int (f_1(u) \pm \ldots \pm f_n(u))du = \int f_1(u)du \pm \ldots \pm \int f_n(u)du,$

6) $\int f(au+b)du = \dfrac{1}{a}F(au+b) + C.$

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$,

2) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$,

3) $\int e^u du = e^u + C$,

4) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$,

5) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$,

6) $\int \cos u\, du = \sin u + C$,

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$,

8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$,

9) $\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C$,

10) $\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C$,

11) $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\, u + C$,

12) $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = \mathrm{cth}\, u + C$,

13) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad (a \neq 0)$,

14) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$,

15) $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C \qquad (a\neq 0)$,

16) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C \quad \left(|u|>|a|\right)$,

17) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C \quad \left(|u|<|a|\right)$,

18) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C$,

19) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C$.

Некоторые интегралы не имею аналога в таблице производных и проверяются дифференцированием.

Пример 107. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$.

$$\left(\arcsin\frac{u}{a}+C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}}\left(\frac{u}{a}\right)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{a^2-u^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\left(\arcsin\frac{u}{a}+C\right) = \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то интеграл $\int f(x)dx$ выражается в элементарных функциях или $f(x)$ интегрируется в конечном виде. Но не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях.

Используя основные правила, можно интегрировать сложные функции.

Пример 108. $\int (x^2 - 4\cos(2x+1) + e^{3x})dx = \dfrac{x^3}{3} - 2\sin(2x+1) + \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$.

В отличие от дифференциального исчисления, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления интегралов. Разработаны лишь частные методы, позволяющие свести интеграл к табличному.

7.4. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Основано на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла.

Примеры решения. Найти неопределенные интегралы

Пример 109. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int (2\cdot 3^2)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C$.

Пример 110. $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$.

Пример 111. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) dx =$

$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$.

Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

В интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяем переменной t по формулам $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$.

Теорема 7.3. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула
$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула замены переменной в неопределенном интеграле.

Доказательство. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Применение. Пусть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C$.

$$x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Пример 112. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \left| e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow x = \ln(t^2 + 1) \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C.$$

При интегрировании заменой переменной важно удачно сделать подстановку. Однако нельзя дать общее правило для любой функции. Это можно сделать для интегрирования отдельных классов функций (тригонометрических, иррациональных и т.д.).