# ЛЕКЦИЯ 14

## 6.3. Абсолютные экстремумы функции на отрезке

Основные характеристики функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ ее абсолютные экстремумы, т.е. наибольшее и наименьшее значения.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то необходимо найти значения $f(a)$, $f(b)$ и $f(x)$ - в точках локального экстремума $x_1,\dots,x_n$. Из них выбрать наибольшее и наименьшее

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1),\dots, f(x_n)\};$$

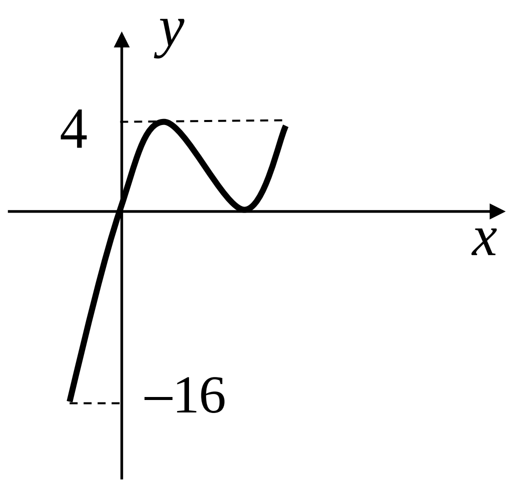
$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1),\dots, f(x_n)\}.$$

**Пример 94.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-1,4]$.

**Решение.** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$

$$f(-1) = -16; \qquad f(4) = 4; \qquad f(1) = 4; \qquad f(3) = 0.$$

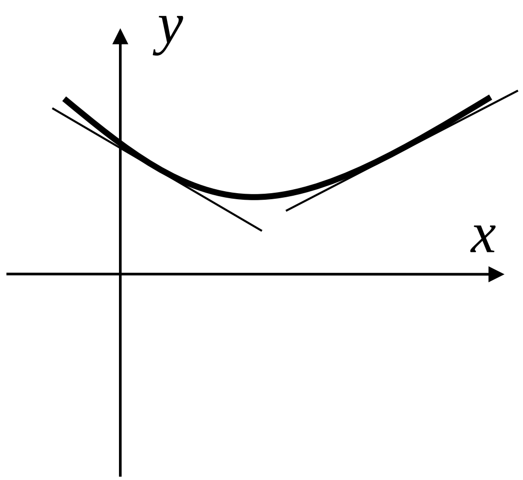
$$\min_{x\in[-1,4]} f(x) = \min\{-16;4;4;0\} = -16; \qquad \max_{x\in[-1,4]} f(x) = \max\{-16;4;4;0\} = 4.$$



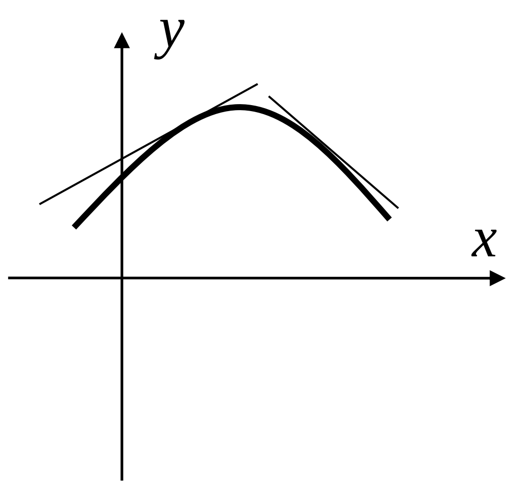
# 6.4. Исследование функции на выпуклость и вогнутость

## Точки перегиба функции

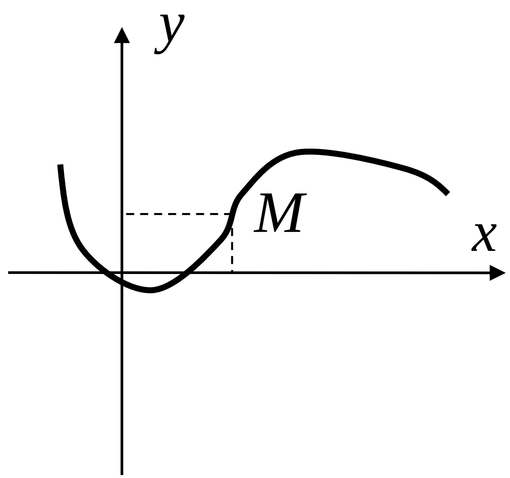
**Определение 6.2.** График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым (выпуклым вниз) на интервале $(a,b)$, если дуги кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ расположены выше любой касательной, проведенной к графику функции.



**Определение 6.3.** График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым (выпуклым вверх) на $(a,b)$, если дуги кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ расположены ниже любой касательной, проведенной к графику функции.



**Определение 6.4.** Точка $\boldsymbol{M(x_0, f(x_0))}$ графика дифференцируемой функции $\boldsymbol{y = f(x)}$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется точкой перегиба.



## Достаточный признак вогнутости (выпуклости)

**Теорема 6.6.** Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a,b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, то график функции вогнутый. Если $f''(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, то график функции выпуклый.

**Доказательство.** Пусть $f''(x) > 0$. Возьмем точку $x_0 \in (a,b)$ и покажем, что все точки графика лежат выше касательной в этой точке.

Уравнение касательной

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$Y$ – ординаты точки касательной. Разность ординат точек кривой и касательной $y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По формуле Лагранжа

$$y-Y=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0),$$

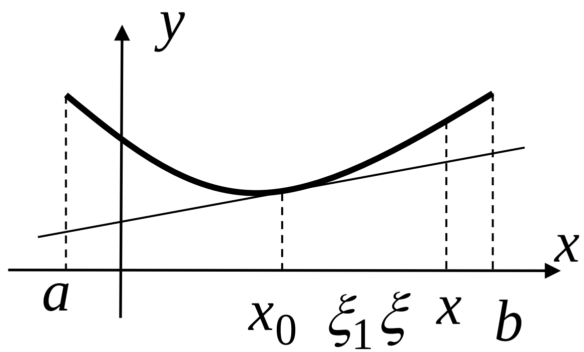
$$\xi\in(x_0,x)\subset(a,b).$$

Применим формулу Лагранжа к функции $f'(\xi)-f'(x_0)$ на $(x_0,\xi)$

$$y-Y=f''(\xi_1)(\xi-x_0)(x-x_0) \quad \xi_1\in(x_0,\xi)\subset(a,b)$$

$$f''(\xi_1)>0\Rightarrow\xi-x_0>0,\ x-x_0>0 \qquad y>Y;$$

$$\xi-x_0<0,\ x-x_0<0. \qquad y>Y.$$




Доказательство при $f''(x)<0$ аналогично.

**Пример 95.** Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

**Решение.** $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\qquad f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

$f''(x)<0 \Rightarrow 3x^2-1<0 \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - функция выпукла,

$f''(x)>0 \Rightarrow 3x^2-1<0 \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right)$ - функция вогнута.

## Достаточные условия существования точек перегиба

**Теорема 6.7.** Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x_0)=0$ или не существует и при переходе через точку меняет знак, то $x_0$ - точка перегиба.

**Доказательство.** Пусть $f''(x)=0$ или не существует. Если $f''(x)<0$ в $O_\delta(x-0)$ и $f''(x)>0$ в $O_\delta(x+0)$, то $x_0$ отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. И наоборот.

В обоих случаях это точки перегиба.

**Пример 96.** Найти точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

**Решение.** $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x. \qquad f''(x) = 12x(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \; x_2 = 2.$$

$$\left.\begin{array}{ll} O_\delta(0-0) \;\; f''>0 & O_\delta(0+0) \;\; f''<0 \\ O_\delta(2-0) \;\; f''<0 & O_\delta(2+0) \;\; f''>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1, x_2$$ - точки перегиба.

## 6.5. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции при $x \to \pm\infty$ или вблизи точки разрыва 2-го рода часто оказывается, что расстояние между точками графика функции и точками некоторой прямой сколь угодно малы. Такую прямую называют ***асимптотой графика***.

Существуют вертикальные и наклонные (частный случай горизонтальные) асимптоты.

***Вертикальные асимптоты*** $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

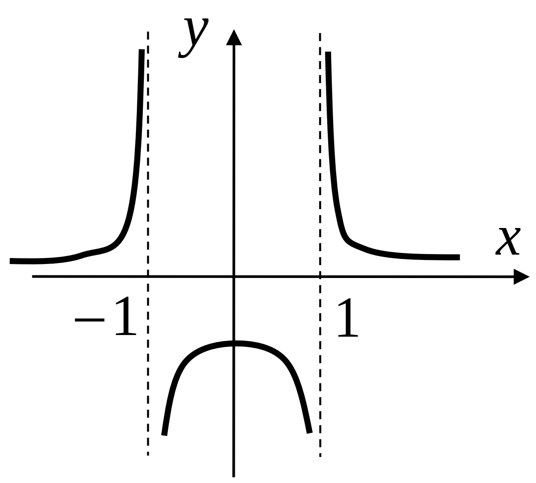
**Пример 97.** Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

**Решение.** В точках $x = \pm 1$ - разрывы 2-го рода.

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1+0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \infty.$$

Уравнения вертикальных асимптот $x = -1$; $\quad x = 1$.



Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной*** (при $k = 0$ ***горизонтальной***) ***асимптотой*** функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функцию можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad (\alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty).$$

**Теорема 6.8**. Для того, чтобы $y = f(x)$ имела наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали 2 предела

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

**Доказательство.**

**Необходимость.** Если $y = kx + b$ - наклонная асимптота, тогда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$). Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(kx + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k; \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(b + \alpha(x)) = b.$$

**Достаточность.** Пусть существуют пределы. Из 2-го предела

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \text{ при } x \to \infty.$$

Это означает, что $y = kx + b$ - наклонная асимптота.

Для $x \to -\infty$ доказательство аналогично.

**Замечание.**

1) если $y_1 = k_1x + b_1 = y_2 = k_2x + b_2$, то двухсторонняя асимптота;

2) $y_1 = k_1x + b_1 \neq y_2 = k_2x + b_2$ - две односторонние асимптоты;

3) $k$ или $b$ не существует, то асимптоты нет.

**Примеры решения задач.** Найти асимптоты графика функции

**Пример 98.** $$y=\frac{1}{1+x^2}.$$

**Решение.** Разрывов 2-го рода нет. Значит вертикальных асимптот нет.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1+x^2)x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

**Ответ.** Горизонтальная двусторонняя асимптота $y=kx+b=0$.

**Пример 99.** Гипербола $x^2 - y^2 = 1$ $\qquad y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$.

**Решение.** Разрывов 2-го рода нет. Значит вертикальных асимптот нет.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\pm\sqrt{x^2-1} \mp x\right) = \pm\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \pm\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Уравнения наклонных асимптот $\qquad y = kx + b = \pm x$.

**Пример 100.** $y=\sqrt{x}$.

**Решение.** Разрывов 2-го рода нет. Значит вертикальных асимптот нет.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty.$$

Асимптот нет.

## 6.6. Общая схема исследования функции

Исследование дважды дифференцируемой (за исключением конечного множества точек) функции $y = f(x)$ на $D(f)$ и построение графика по схеме:

1) Находим $D(f)$, определяем точки разрыва функции, вертикальные асимптоты, нули функции, точки пересечения графика с осью $Oy$, периодичность, симметрию.
2) Находим невертикальные асимптоты (если существуют).
3) С помощью $f'(x)$ определяем критические точки и интервалы монотонности.

4) С помощью $f''(x)$ определяем выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции.
5) Находим локальные экстремумы.
6) По результатам строим таблицу, на основании ее - график.

**Пример 101.** Провести полное исследование и построить график функции $\boldsymbol{y = \frac{x^3}{3 - x^2}}$.

**Решение.** Согласно схеме решения

1) $\boldsymbol{D(f) = R \setminus \{\pm\sqrt{3}\}}$ непрерывна на $\boldsymbol{D(f)}$;

$\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} y = \lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} \frac{x^3}{3 - x^2} = \pm\infty$, $\boldsymbol{x = \pm\sqrt{3}}$ – точки разрыва 2-го рода,

$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{3}}$ – вертикальные асимптоты;

$\boldsymbol{x = 0 \Rightarrow y = 0}$;

функция непериодическая;

функция нечетная, т.к. $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \frac{(-x)^3}{3-x^2} = \frac{-x^3}{3-x^2}$;

функция симметрична относительно начала координат (поэтому рассматриваем функцию на $[0,\infty)$)

2) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(3-x^2)x} = -1$,

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0,$$

$y = -x$ – наклонная асимптота.

3) Первая производная $y' = \frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$ определена на $D(f)$. $y'=0$ при $x_1=0 \quad x_2=3$

$f'(x)>0 \Rightarrow 9-x^2>0 \Rightarrow 0<x<3$ $y$ – возрастает на $(0;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3)$

$f'(x)<0 \Rightarrow 9-x^2<0 \Rightarrow x>3$ $y$ –убывает на $(3;\infty)$.

4) $y'' = \frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\cdot 2\cdot(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4} = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

определена на $D(f)$. $f''(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow 0<x<\sqrt{3}$ - вогнута.

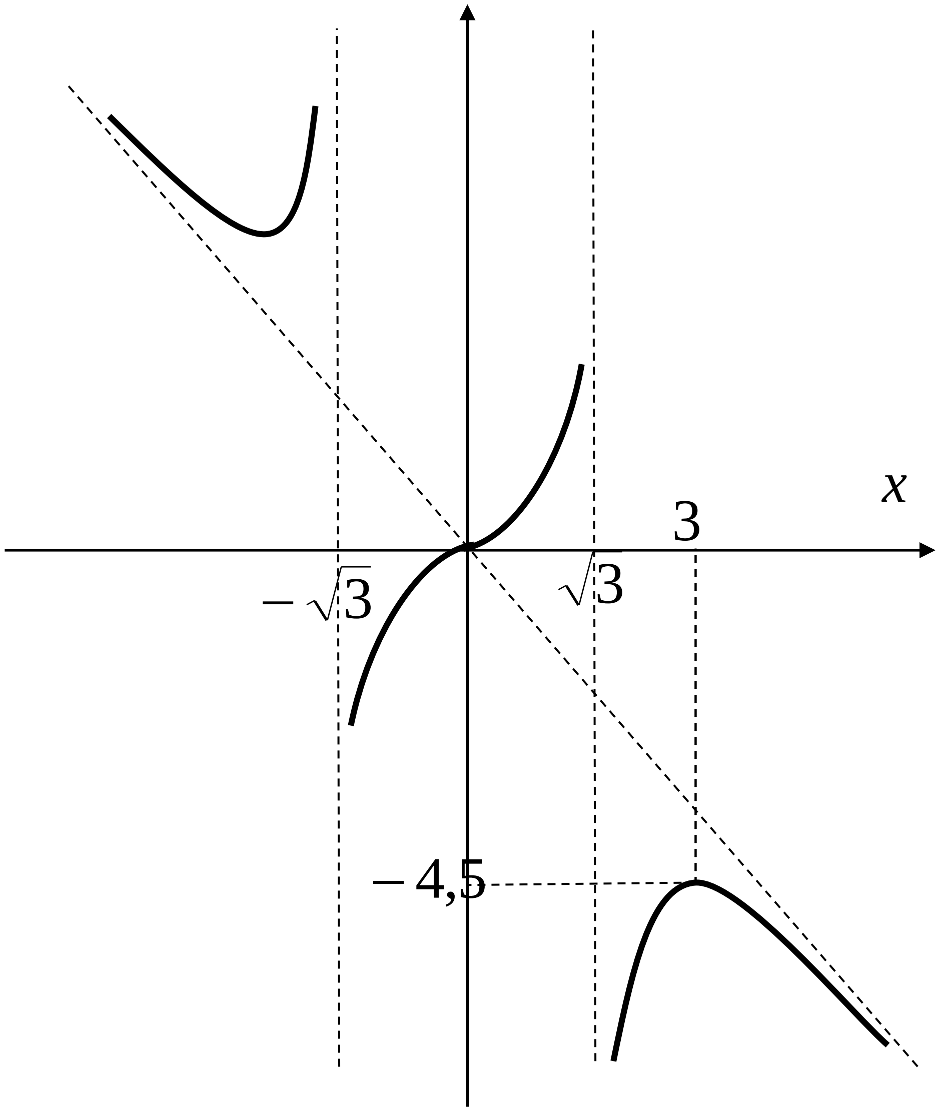
$f''(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow x>\sqrt{3}$ - выпукла.

$$\left.\begin{matrix} O_\delta(0-0) & f''(x)<0 \\ O_\delta(0+0) & f''(x)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=0$$ - точка перегиба.

5) $f''(3)<0$ - max локальный; $f''(-3)>0$- min локальный.

6)

| $x$ | 0 | $(0,\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3};3)$ | 3 | $(3;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | точка перегиба | возрастает | $\neg\exists$ | возрастает | –4,5 **max** | убывает |
| $y'$ | 0 | + | $\neg\exists$ | + | 0 | – |
| $y''$ | 0 | + | $\neg\exists$ | – | – | – |


x
3
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
$-4{,}5$