ЛЕКЦИЯ 13

6. Исследование функций с помощью производных

6.1. Возрастание и убывание функций

Теорема 6.1. Дифференцируемая на (a,b) функция не убывает (не возрастает) на (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ $\forall x\in(a,b)$.

Если же $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)\Rightarrow f$ возрастает (убывает) на (a,b).

Доказательство.

1. Неубывающая функция

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на (a,b) $\Rightarrow\forall x\in(a,b)$ при $\Delta x>0$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\ge 0 \ \ \forall x\in(a,b).$$

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ по формуле Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Т.к. $f'(\xi) \geq 0 \ (x_1 < \xi < x_2) \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b): \ x_1 < x_2 \ \ f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ не убывает на (a,b).

2. Возрастающая функция

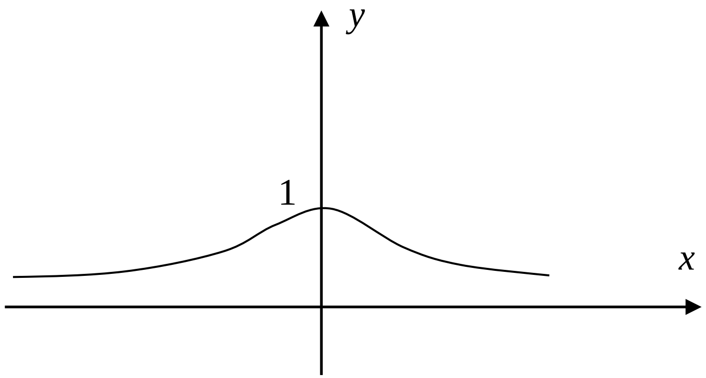
Пусть $f'(x) > 0$ на (a,b) $\Rightarrow \forall \xi \in (a,b) \quad f'(\xi) > 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f$ возрастает на (a,b).

Условия теоремы для возрастающих и убывающих функций достаточны, но не необходимы.

Пример 88. $y = x^3$ возрастает на (-1,1), однако при $x = 0 \ \ f'(x) = 0$.

Пример 89. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$



Ответ. $f'(x)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)$ функция возрастает,

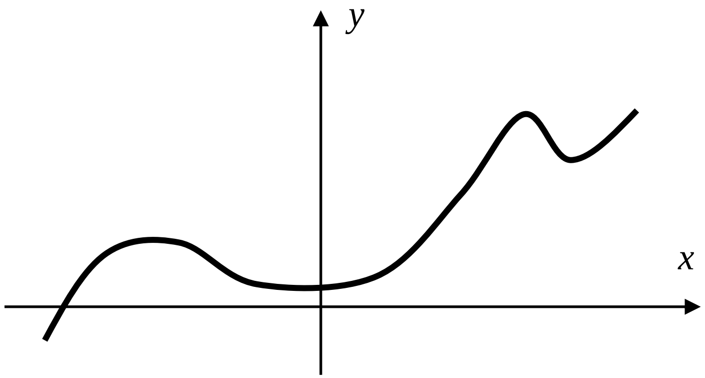
$f'(x)<0 \Rightarrow x\in(0,\infty)$ функция убывает.

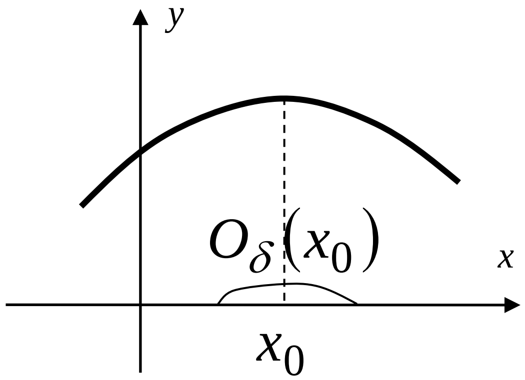
6.2. Точки локального экстремума функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции

Экстремум функции

Определение 6.1. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если $\exists O_\delta(x_0): \forall x \in O_\delta(x_0)$ выполняется

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0 \quad (\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$





Значение $f(x_0)$ называется локальным max (min) функции и пишут

$$\max_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\min_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \right).$$

Точки x_0 max и min функции называются точками экстремума функции, а max и min функции называются экстремумами функции.

Когда max и min несколько, то возможно, что $\max < \min$. Наименьшее и наибольшее значение на отрезке $[a, b]$ в отличие от локального экстремума называются абсолютными min и max функции f.

Необходимое условие существования экстремума функции

Теорема 6.2. Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то в этой точке $f'(x_0)=0$ или не существует.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ в x_0 достигает максимума. Тогда существует $\dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0)$

$$f(x_0) > f(x) \Rightarrow f(x_0) > f(x_0+\Delta x) \qquad \Delta x \neq 0.$$

При $\Delta x<0$ $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$ $\qquad$ $\Delta x>0$ $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$

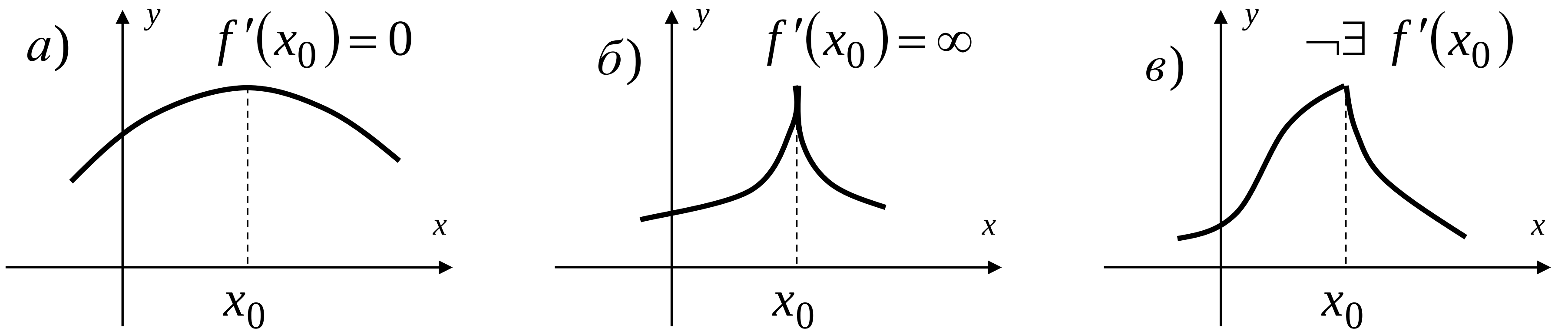
Если пределы существуют при $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x<0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0-0) \geq 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+0)\le 0.$$

Если $f'(x_0 \pm 0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=0$.

Если $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ отличны от нуля, то не существует $f'(x_0)$.



Точки, в которых производная $f'(x_0)=0$ или не существует, называются критическими или точками возможного экстремума.

а) точки, в которых $f'(x_0)=0$, называются стационарными;

б) точка возврата функции;

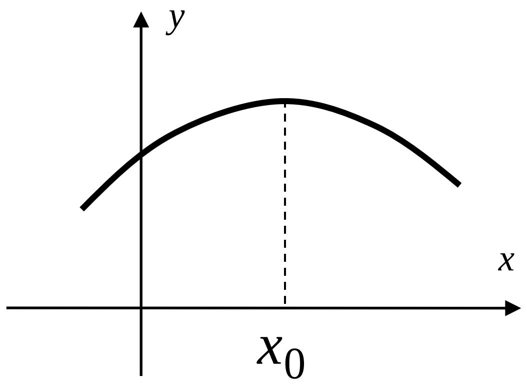
в) угловая точка функции.

Не всякая критическая точка является точкой локального экстремума.

Пример 90. $f(x)=x^5$. $f'(x)=5x^4$, $x=0 \Rightarrow f'(x)=0$, но здесь функция возрастает.

Достаточные условия существования экстремума

Теорема 6.3. (Первый достаточный признак существования экстремума). Пусть x_0 - критическая точка непрерывной функции. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с “+” на “-“, то локальный max. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с “-“ на “+”, то локальный min. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 нет экстремума.



Доказательство. Пусть x_0 - точка возможного экстремума.

$$f'(x) > 0 \; \forall x \in O_\delta(x_0 - 0) \qquad\qquad f'(x) < 0 \; \forall x \in O_\delta(x_0 + 0).$$

Тогда при $f'(x) > 0 \; \forall x \in O_\delta(x_0 - 0) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

$$f'(x) < 0 \; \forall x \in O_\delta(x_0 + 0) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$

$\Leftrightarrow \exists O_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x)$, т.е. точка локального максимума.

Аналогично для локального минимума.

Если $f'(x)$ сохраняет знак, то функция монотонна и x_0 не является точкой локального экстремума.

Пример 91. Найти экстремумы функции $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2}$.

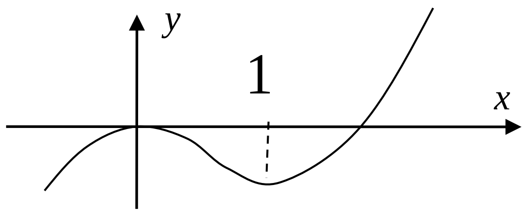
Решение. $\boldsymbol{f'(x)=x^2-x=x\left(x-1\right)}$. $\boldsymbol{f'(x)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=1}$.

$\boldsymbol{x_1=0}$ $\boldsymbol{x\in O_\delta(0-0)\ \ f'(x)>0}$ $\boldsymbol{x\in O_\delta(0+0)\ \ f'(x)<0}$

$$\max_{x\in O_\delta(0)} f(x)=f(0)=0$$

$\boldsymbol{x_2=1}$ $\boldsymbol{x\in O_\delta(1-0)\ \ f'(x)<0}$ $\boldsymbol{x\in O_\delta(1+0)\ \ f'(x)>0}$

$$\min_{x\in O_\delta(1)} f(x)=f(1)=-\frac{1}{6}.$$



Теорема 6.4. (Второй достаточный признак существования экстремума функции).

Стационарная точка x_0 функции $f(x)$ дважды дифференцируемой в $O_\delta(x_0)$, является точкой локального min, если $f''(x_0)>0$ или точкой локального max, если $f''(x_0)<0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0)>0 \Rightarrow f'(x)$ в $O_\delta(x_0)$ возрастает, но $f'(x_0)=0$, следовательно меняет знак с “–“ на “+”. Согласно предыдущей теореме, это точка локального минимума. Если $f''(x_0)<0$, то $f'(x)$ убывает, т.е. меняет знак с “+” на “–“ , следовательно, x_0 - точка локального max.

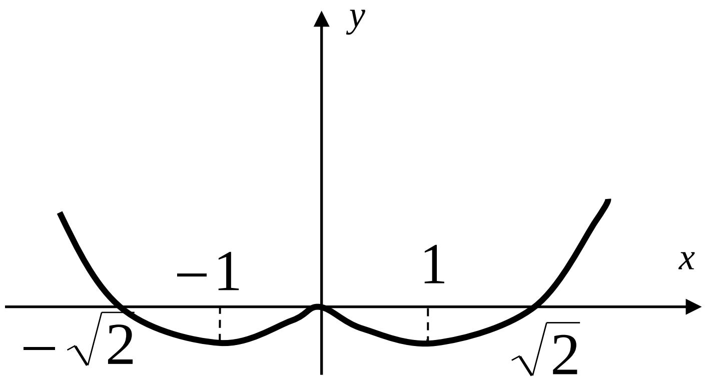
Пример 92. Найти точки экстремумов функции $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}$.

Решение. $f'(x)=x^3-x=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$$x_1=-1,\qquad x_2=0,\qquad x_3=1,$$

$$f''(x)=3x^2-1.$$

$f''(-1)=2$ - min, $\quad f''(0)=-1$ - max, $\quad f''(1)=2$ - min.



Теорема 6.5. (Третий достаточный признак существования локального экстремума).

Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

1) n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$ - x_0 - локальный **max**.

2) n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$ - x_0 - локальный **min**.

3) n – нечетное $\Rightarrow$ x_0 не является точкой локального экстремума.

Пример 93. Найти точки экстремумов функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Решение. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_3 = 3$.

В точках x=0 и x=3 возможен экстремум. $f''(x) = 12x^2 - 24x$.

$f''(3) = 36 > 0 \Rightarrow$ в точке $x = 3$ локальный минимум,

$f''(0) = 0$.

$f'''(x) = 24x - 24$, $f'''(0) = -24 \Rightarrow x = 0$ не является точкой локального экстремума.