ЛЕКЦИЯ 12

2) **Разложение функции** $f(x)=\sin x$.

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(0)=0$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$0<\theta<1$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

3) **Разложение функции** $f(x) = \cos x$.

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$0 < \theta < 1.$$

4) **Разложение функции** $\boldsymbol{f(x)=\ln(1+x)}$. Функция определена и бесконечное число раз дифференцируема на $\boldsymbol{(-1;\infty)}$.

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=(1+x)^{-1} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-(1+x)^{-2} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=2\cdot 1\cdot(1+x)^{-3} \qquad f'''(0)=2\cdot 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}n!(1+x)^{-(n+1)} \qquad f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^{n}n!(1+\theta x)^{-(n+1)},$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1.$$

5) **Разложение функции** $f(x)=(1+x)^m, \quad m\in R$.

Функция определена и бесконечное число раз дифференцируема на $(-1;1)$.

$f(x)=(1+x)^m$ $\qquad$ $f(0)=1$

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$ $\qquad$ $f'(0)=m$

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$ $\qquad$ $f''(0)=m(m-1)$

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$ $\qquad$ $f'''(0)=m(m-1)(m-2)$

……………………………………………………………….

$f^{(n)}(x)=m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$ $\qquad$ $f^{(n)}(0)=m(m-1)...(m-n+1)$

$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)...(m-n)(1+x)^{m-n+1}$ $\qquad$ $f^{(n+1)}(\theta x)=m(m-1)...(m-n)(1+\theta x)$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

Пример 80. Разложить функцию $\boldsymbol{f(x)=e^{-x^2}}$ по степеням $\boldsymbol{x}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции $f(x)=e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

В формулу вместо x будем подставлять $-x^2$. Получим

$$\boldsymbol{e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+R_n(x)},$$

$$\boldsymbol{R_n(x)=\frac{(-x^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^2},\ \ 0<\theta<1}.$$

Пример 81. Разложить функцию $f(x) = \ln(x)$ по степеням $(x\text{-}1)$. $x_0 = 1$.

Решение. Воспользуемся разложением функции $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1.$$

В формулу вместо x будем подставлять $(x\text{-}1)$. Получим

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x-1))^{n+1}}.$$

5.17. Приложения формулы Тейлора

Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции

Если $f(x)$ определена в $O_\delta(x_0)$, то для выделения главной части функции удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в $O_\delta(x_0)$ и при $x \to x_0$

$f(x) = g(x) + o(g(x))$, $g(x)$ - главная часть в окрестности точки x_0.

Отсюда $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \dfrac{o(g(x))}{g(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

При $x \to x_0$ $\qquad f(x) \sim g(x).$

Пример 82. Выделить главную часть функции $f(x)=x^4+2x^2+5x$ в $O_\delta(0)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^2+5x}{5x}=1 \qquad \Rightarrow g(x)=5x,$

$$x^4+2x^2+5x=5x+o(5x).$$

Пример 83. Выделить главную часть функции $f(x)=x^3+2x+1$ в $O_\delta(\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{x^3}=1\Rightarrow g(x)=x^3,$

$$x^3+2x+1=x^3+o\left(x^3\right).$$

Главная часть функции определяется неоднозначно.

Пример 84. Выделить главную часть функции $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x$ в $O_\delta(0)$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 2x^2 + 5x}{2x^2 + 5x} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 5x = 2x^2 + 5x + o(2x^2 + 5x).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает общий метод выделения главной части в окрестности точки x_0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right).$$

Тогда для $f(x)$ в $O_\delta(0)$

$$e^x \sim 1 + x; \qquad e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} \text{ и т.д.}$$

$$\sin x \sim x; \qquad \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} \text{ и т.д.}$$

Использование формулы Тейлора для приближенного вычисления значения функции в точке

Остаток в форме Лагранжа

Если известны $f, f', \dots, f^{(n)}$ в точке x_0,

то
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Погрешность
$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|, \qquad x_0 < \xi < x.$$

Пример 85. Вычислить $e^{0,1}$ с точностью $0,001$.

Решение. $e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+...+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)$. $\qquad R_{n}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$0<\theta<1, \quad x=0,1.$$

$$e^{0,1}=1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+...+\frac{(0,1)^{n}}{n!}, \qquad R_{n}(x)=\frac{e^{0,1\cdot\theta}(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}<0,001.$$

Полагая $n=1,2,3,...$, находим, что неравенство выполняется с $n=3$.

Итак, $e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,055$.

В частном случае при $n=1$ $\quad f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

с погрешностью $R_2(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \quad x_0<\xi<x$.

Т.к. по определению $x-x_0=\Delta x$, $\; f'(x_0)\Delta x=df(x_0)$,

то $f(x)\approx f(x_0)+df(x_0)$.

Пример 86. Найти площадь круга $r=1{,}01$.

Решение. $S=\pi r^2$, $\qquad r_0=1$, $\qquad \Delta r=0{,}01$.

$$S(r)\approx S(r_0)+dS(r_0)=S(r_0)+S'(r_0)\Delta r,$$

$$S(1{,}01)\approx S(1)+2\pi\cdot 0{,}01=1{,}02\pi$$

Ошибка $R_2(r)=\dfrac{S''(\xi)}{2!}(r-r_0)^2$, $\qquad r_0<\xi<r$, $\qquad S''(r)=2\pi$,

$$R_2(r)=\frac{2\pi}{2}0{,}01^2=0{,}0001\pi.$$

Пример 87. Вычислить $f(x)=e^{x^2-x}$, $x=0,03$.

Решение. $f(x)\approx f(x_0)+df(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

$$x_0=0,\quad x=0,03,\quad \Delta x=0,03,\quad f(0,03)\approx f(0)+f'(0)\cdot 0,03.$$

$$R_2=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot x^2=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(0,03)^2\quad 0<\xi<0,03.$$

$$f'(x)=(2x-1)\cdot e^{x^2-x}\Rightarrow f'(0)=-1.$$

$$f''(x)=2\cdot e^{x^2-x}+(2x-1)^2\cdot e^{x^2-x}\Rightarrow f''(\xi)<3.$$

$$f(0,03)\approx 1+(-1)\cdot 0,03=0,97,\qquad R_2(x)<\frac{3\cdot(0,03)^2}{2}=0,0017.$$