ЛЕКЦИЯ 11

Теорема 5.6. (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) непрерывны на $[a,b]$;

2) дифференцируемы на $[a,b]$, причем $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

$g(b) \neq g(a)$, т.к. иначе выполняются условия теоремы Ролля и существует точка $\xi : g'(\xi) = 0$, что противоречит условиям теоремы.

Вспомогательная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля 1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$; 2) $\varphi(x)$ дифференцируема на (a,b); 3) $\varphi(a) = 0$; $\varphi(b) = 0 \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$.

Найдем $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

По теореме Ролля существует точка

$$\xi \in (a,b) : \varphi'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi \in (a,b).$$

Если положить $g(x) = x$, то формула Коши перейдет в формулу Лагранжа.

5.14. Правило Лопиталя

Теорема 5.7. (Правило Лопиталя). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Определены и дифференцируемы на интервале (a,b) за исключением, быть может, точки x_0, причем $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$).

3) Существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

то существует также предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Докажем для случая $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Доопределим функции f и g в точке $x = x_0$ $\qquad f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Эти функции теперь непрерывны в точке x_0. Рассмотрим отрезок $[x_0, x]$: $x_0 < x < b$. На этом отрезке f и g непрерывны, а на (a, x) дифференцируемы. Следовательно, по теореме Коши существует точка

$$\xi : (a < x_0 < \xi < x): \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

С учетом $f(x_0) = g(x_0) = 0$ имеем $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Если $x \to x_0$, то $\xi \to x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока неопределенность не исчезнет

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Примеры решения задач. Найти пределы

Пример 73. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пример 74. $$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{1/(-\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-\sin^2 x}{x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\sin x\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Пример 75. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x\operatorname{tg} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\dfrac{\sin 2x}{2}+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x+1}=0.$$

Пример 76.

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0.$$

Пример 77. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x \quad \left(0^0\right)$. Предварительно логарифмируем

$$y=x^x \qquad\qquad \ln y=x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}x\ln x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0$$

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\ln\lim_{x\to 0+0}y=0\Rightarrow\lim_{x\to 0+0}y=1.$$

Пример 78. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad \left(\infty^0\right)$. Предварительно логарифмируем

$$y = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}; \quad \ln y = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x; \quad \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1.$$

Пример 79. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1^\infty\right)$. Предварительно логарифмируем

$$y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad\qquad \ln y = \frac{1}{x^2}\ln\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

5.15. Формула Тейлора

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Возникает вопрос замены функции многочленом некоторой степени.

Из определения дифференцируемой функции $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$,

т.е. $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Т.е. существует многочлен 1-й степени $P_1(x) = f(x_0) + b_1(x - x_0)$: при

$x \to x_0$ $\quad f(x) = P_1(x) + o(x - x_0).\quad P_1(x_0) = f(x_0);\quad P_1'(x_0) = b_1 = f'(x_0).$

Поставим общую задачу: $f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n$.

Найдем многочлен $P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n$.

$$f(x_0) = P_n(x_0);\quad f'(x_0) = P_n'(x_0),\quad \ldots\quad , f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Определим $b_0, b_1, ..., b_n$.

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 2\cdot 1\cdot b_n.$$

Подставляя в левые и правые части равенств x_0,

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = P_n(x_0) = b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n!b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = f(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0). \end{array}\right.$$

Тогда $$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Это многочлен Тейлора.

Обозначим разность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Согласно определению многочлена $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = ... = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Докажем, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Применим *n* раз правило Лопиталя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = ... = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Т.е. $R_n(x) = o((x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказана теорема.

Теорема 5.8. Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в $O_\delta(x_0)$, то при $x \to x_0$ имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

или
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n,$$

где $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ - остаточный член в ***форме Пеано***.

Если положить $x_0 = 0$, то ***формула Маклорена***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Пусть $y = f(x)$ имеет производные до $(n+1)$.

Введем функцию $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$.

Очевидно, что $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0;\ g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

Применим к функциям $R_n(x_0) = f(x) - P_n(x)$ и $g(x)$ теорему Коши.

Т.к. $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$, то

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g_n'(c_1)} = \ \ldots \ = \frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_n^{(n)}(c_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

где $c_1 \in (x_0, x);\ c_2 \in (x_0, c_1), \ldots,\ c_n \in (x_0, c_{n-1}),\ \xi \in (x_0, c_n) \subset (x_0, x)$.

С учетом $R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$, имеем $\boxed{R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$,

$\xi \in (x_0, x)$.

Т.к. $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $\quad 0 < \theta < 1$, то $\boxed{R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$.

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

$\xi \in (x_0, x)$.

Если $x_0 = 0$, то $\xi = \theta \cdot x$ $\quad 0 < \theta < 1$ ***Формула Маклорена***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

5.16. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1) **Разложение функции** $f(x)=e^x$

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=e^x & f(0)=1 \\
f'(x)=e^x & f'(0)=1 \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
f^{(n)}(x)=e^x & f^{(n)}(0)=1 \\
f^{(n+1)}(x)=e^x & f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}
\end{array}
$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$