ЛЕКЦИЯ 10

5.8 Дифференцирование неявных функций $F(x, y) = 0$.

Дифференцируем по x. Разрешаем относительно y'.

Пример 66. Найти производную функции, заданной неявно

$$x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$$

Решение. Продифференцируем заданное выражение по x

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0.$$

Разрешим полученное равенство относительно производной

$$y'(3x + 2y) = -(2x + 3y)$$

и получим ответ

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

5.9 Логарифмическое дифференцирование

1) Степенно-показательная функция $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$

Решение. Прологарифмируем исходное выражение

$$\ln y = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right).$$

Найдем производную от полученного равенства

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}.$$

Получим ответ

$$y' = y\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right).$$

2) Произведение большого числа сомножителей

$$y = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)$$

Решение. Прологарифмируем исходное выражение

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n.$$

Найдем производную от полученного равенства

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}.$$

Получим ответ

$$y' = y \cdot \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n} \right)$$

5.10. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$.

Предположим, что функции дифференцируемы $\forall t$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Также считаем, что $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема.

Тогда можно рассматривать $y = y(x)$, как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, где ***t*** - промежуточный параметр.

Продифференцируем ее по правилу дифференцирования сложных функций

$$y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x. \qquad\qquad t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Приняв $\varphi'(t) = x'_t \quad \psi'(t) = y'_t,$ окончательно имеем

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'_x = y'_t / x'_t \\ x = \varphi(t). \end{array}\right.$$

Пример 67. Найти производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Решение. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{b\cos t}{a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$ **Ответ.** $\left.\begin{array}{l} y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t \\ x = a\cos t. \end{array}\right\}$

5.11. Производные высших порядков

Общие сведения

Производная $y' = f'(x)$ является функцией от x и может быть сама дифференцируема.

Производная 2-го порядка или вторая производная $y'', f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$y''(x) \overset{def}{=} (y')'.$$

Механический смысл – ускорение.

Третья производная $y'''(x) \overset{def}{=} (y'')' = f'''(x).$

Производная n-го порядка $y^{(n)}(x) \overset{def}{=} (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$

Примеры решения задач. Найти производные высших порядков от следующих функций:

Пример 68. $y = \ln(1+x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \qquad f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}; \qquad f''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \qquad , f^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Пример 69. $y = \sin x$,

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Производная высших порядков от неявных функций

Пример 70. Найти производные второго и третьего порядка от функции, заданной неявно $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Продифференцируем исходное выражение

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Тогда $$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

Следовательно, $$y''' = \left(-\frac{a^2}{y^3}\right)' = \left(-a^2 y^{-3}\right)' = 3a^2 y^{-4} \cdot y' = 3a^2 y^{-4} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{-3a^2 x}{y^5}.$$

Производные высших порядков функций, заданных параметрически

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t) \\ y&=\psi(t) \end{aligned}\quad t\in T\right\}.$$

Так как 2-я производная есть производная от 1-ой, то

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t) \\ y&=\psi(t) \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} y'_x&=\frac{y'_t}{x'_t} \\ x&=\varphi(t) \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} y''_{xx}&=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \\ x&=\varphi(t) \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} y'''_{xxx}&=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \\ x&=\varphi(t) \end{aligned}\right\}\text{ и т.д.}$$

Пример 71. $\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}$ $y'''_x = ?$

Решение. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$

$$\begin{cases} y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t \\ x = a\cos t \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

$$\begin{cases} y''_{xx} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t} \\ x = a\cos t \end{cases}$$

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}\right)'_t}{-a\sin t} = -\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$$

$$\begin{cases} y'''_{xxx} = -\dfrac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t} \\ x = a\cos t \end{cases}$$

5.12. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx не зависит от x, т.е. dx будет постоянной.

Дифференциал от дифференциала называется дифференциалом 2-го порядка

$$d^2 y \overset{def}{=} d(dy).$$

$$d^{(n)} y \overset{def}{=} d(d^{(n-1)} y).$$

Найдем $d^2 y$

$$d^2 y \overset{def}{=} d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2,$$

$$d^{(n)} y = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

5.13. Теоремы о среднем значении

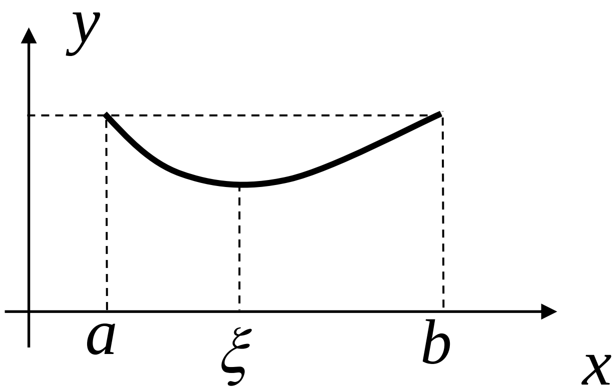
Теорема 5.4. (Ролля). Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет условиям

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi\in(a,b)$: $f'(\xi)=0$.



Доказательство. Существуют *M*- наибольшее и m – наименьшее.

Возможны 2 случая.

1) $M=m \Leftrightarrow f(x)=\text{const} \Rightarrow f'(x)=0 \ \ \forall x\in[a,b]$.

2) $M>m$, тогда из $f(a)=f(b)$ следует, что либо *M*, либо m она принимает внутри интервала в точке $\xi\in(a,b)$.

Для определенности $f(\xi)=m \Rightarrow f(x)\ge f(\xi) \ \forall x\in[a,b]$.

Покажем, что $f'(\xi)=0$.

Из условия 2 $\exists f'(\xi) \ \forall\xi\in(a,b)$. Это равносильно

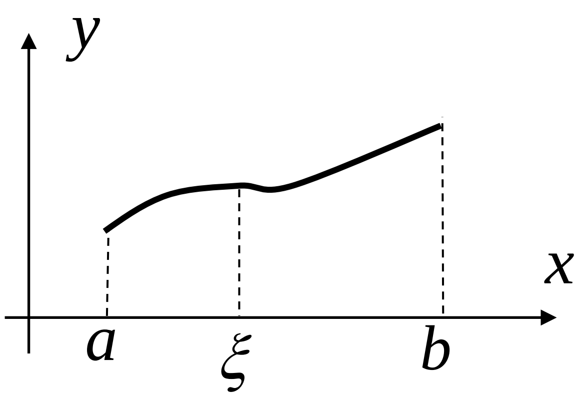
$$\forall\xi\in(a,b) \ \exists f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

Так как $M > m$, то $f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi - 0) \leq 0 \\ \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi + 0) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Это условие достаточное, но не необходимое.



Теорема 5.5. (Лагранжа). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то существует по крайней мере одна точка

$$\xi \in (a,b):\ \ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=(b-a)\cdot f(x)-(f(b)-f(a))\cdot x.$$

Она удовлетворяет условиям теоремы

1) непрерывна; 2) дифференцируема; 3) $\varphi(a)=\varphi(b)=bf(a)-af(b)$,

т.е. она удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

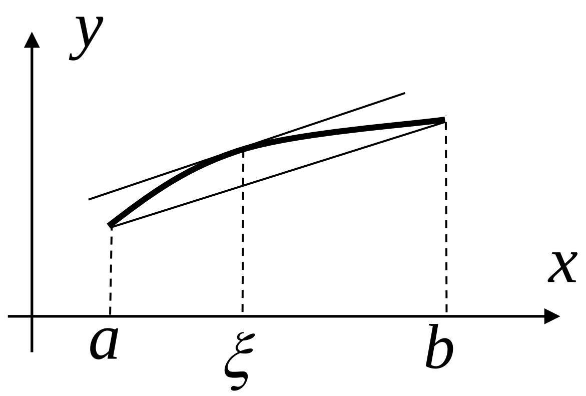
Тогда $\varphi'(x)=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a))$.

Т.е. существует точка $\xi \in (a,b):\ \varphi'(\xi)=0$.

$$(b-a)f'(\xi)-(f(b)-f(a))=0 \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a).$$

Иногда используют форму (формула Лагранжа)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\quad \xi\in(a,b).$$



Если в теореме Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, то получится теорема Ролля.

Положим в теореме Лагранжа $a = x_0$ $b = x_0 + \Delta x$.

Тогда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x$, где $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$. Это ***формула конечных приращений***. Она дает точное выражение приращения функции в отличие от приближенного.

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 72. Найти $\sin 31^\circ$. $f(x) = \sin x$ $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

$$\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \cos\xi \cdot \Delta x \qquad \xi \in [x_0, x_0 + \Delta x].$$

$$\sin 31^\circ = \sin 0,541. \qquad \sin(x + \Delta x) = \sin x_0 + \cos\xi \cdot \Delta x.$$

$$\sin 0,541 = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\xi \cdot 0,0175 \qquad \frac{\pi}{6} < \xi < 0,541.$$

Возьмем $\cos\xi \approx \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 0,541 \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0175 = 0,515.$