ЛЕКЦИЯ 9

5.2. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции

Определение 5.4. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A – некоторое действительное число; $o(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Теорема 5.1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.

Теорема 5.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Функция дифференцируема, следовательно

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0.$$

Следствие. Если функция $y = f(x)$в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 61. Функция $y=|x|$ непрерывна во всех точках области определения, но в точке x=0 производная не существует т.к.

$$f'(0+0)=1\neq f'(0-0)=-1.$$

Пример 62. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ непрерывна во всех точках области определения, но в точке x=0 производная не существует т.к.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{\left(x+\Delta x\right)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\Delta x\right)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Дифференциал функции

Если функция дифференцируема в точке x_0, то

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда, если $f'(x_0) \neq 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(1 + \dfrac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}\right) = 1.$

Следовательно, $\Delta f(x_0) \sim f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

Величину $f'(x_0)\Delta x$ называют ***дифференциалом*** и обозначают

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Дифференциал и приращение независимой переменной равны $dx = \Delta x$.

Поэтому $$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Пример 63. Рассмотрим функцию $y = x^2$. В точке x_0 дифференциал

$$dy = 2x_0 \Delta x = 2x_0 dx.$$

Это линейное слагаемое приращения функции

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2.$$

Дифференциал можно использовать для приближенного вычисления значений функций.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx.$$

Пример 64. $y=x^2\quad x_0=1\quad dx\approx 0{,}02\qquad \Delta y=?\quad dy=?$

Решение. $\Delta y=(1{,}02)^2-1=0{,}0404$; $y'=2x$; $dy=2\cdot 0{,}02=0{,}04$.

Пример 65. $\sqrt{10}=?$

Решение. Примем $f(x)=\sqrt{x}$, $\quad x_0=9$, $\quad dx=1$.

$f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, $\quad f'(9)=\dfrac{1}{6}$, $\quad f(9)=3$. Тогда $\sqrt{10}\approx 3+\dfrac{1}{6}\cdot 1\approx 3{,}17$.

5.3 Производная и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала.

Производная сложной функции

Пусть $y = f\left(u(x)\right) = (f \circ u)(x)$. Пусть известны производные $f'_u(u)$ и $u'_x(x)$. Дадим приращение Δx. Тогда получим приращение $\Delta u \to \Delta y$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Т.к. функции дифференцируемы, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$; $\quad \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = f'_u(u)$.

Следовательно, $y' = f'_u(u) \cdot u'(x)$.

u – промежуточный аргумент; ***x*** – основной аргумент.

Правило дифференцирования сложной функции

Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по основному аргументу.

Аналогично можно получить выражение для производной для любого числа промежуточных аргументов

$$y = f(u), \quad u = u(v), \quad v = v(t), \quad t = t(x), \qquad y' = f'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x.$$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантность формы дифференциала

Пусть дана сложная функция $y = f(u), \quad u = u(x)$. Тогда

$$dy = f'(x)dx. \tag{1}$$

С другой стороны, $dy = f_u'(u)u'(x)dx$.

Т.к. $u'(x)dx = du$, то

$$dy = f_u'(u)du. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) совпадают по форме, но имеют разный смысл.

Свойство инвариантности

Дифференциал функции всегда есть произведение производной на дифференциал аргумента.

5.4. Правила дифференцирования

1) Сумма $y = u(x) + v(x)$

$$y' = u' + v' \qquad dy = du + dv$$

Доказательство. $\Delta x \Rightarrow \quad \Delta y = \Delta u(x) + \Delta v(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

2) Произведение $y = u \cdot v$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad dy = v \cdot du + u \cdot dv$$

Доказательство. $\Delta y = \left(u + \Delta u\right) \cdot \left(v + \Delta v\right) - u \cdot v = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad .$$

3) Частное $y = \dfrac{u}{v}$

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Доказательство. $\Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v \cdot \left(v + \Delta v\right)}$; $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \left(v + \Delta v\right)}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(v + \Delta v\right)} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

4) Постоянная $y=C$ $y'=0$

Доказательство. $\forall \quad \Delta x \Rightarrow \Delta y=0$

Следствия:

1) $y=C\cdot u(x) \Rightarrow y'=C\cdot u'(x) \Rightarrow dy=C\cdot du(x)$

2) $y=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\cdot u_k(x) \Rightarrow y'=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\cdot u_k'(x) \Rightarrow dy=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\cdot du_k(x)$

5.5. Производные и дифференциалы основных элементарных функций

1) Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \qquad a > 0, \qquad a \neq 1 \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad dy = \frac{dx}{x \cdot \ln a} \quad .$$

Доказательство. $\Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

В частном случае $$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Для сложной функции

$$y = \log_a u(x) \quad a > 0,\ a \neq 1 \quad y' = \frac{u'(x)}{u(x)\cdot \ln a} \quad dy = \frac{du(x)}{u(x)\cdot \ln a}.$$

2) Степенная функция

$$y=\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha} \qquad \alpha\in R \qquad y'=\alpha\cdot\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha-1}\cdot u'\left(x\right)$$

$$dy=\alpha\cdot\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha-1}\cdot du\left(x\right).$$

Доказательство. 1) $u\left(x\right)>0;\ \ln y=\alpha\cdot\ln u\left(x\right);\ \left(\ln y\right)'=\left(\alpha\cdot\ln u\left(x\right)\right)'$

$$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)} \quad \Rightarrow \quad y'=y\cdot\alpha\cdot\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}=\alpha\cdot\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha-1}\cdot u'\left(x\right);$$

2) $u\left(x\right)<0;$ $\qquad y=\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha}=\left(-1\right)^{\alpha}\cdot\left(v\left(x\right)\right)^{\alpha}$ $\qquad v\left(x\right)>0$

$$y'=\left(-1\right)^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\left(v\left(x\right)\right)^{\alpha-1}\cdot v'\left(x\right)=\alpha\cdot\left(u\left(x\right)\right)^{\alpha-1}\cdot u'\left(x\right).$$

3) Показательная функция $y = a^{u(x)} \quad 0 < a \quad a \neq 1$

$$y' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a \qquad dy = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot du(x)$$

Доказательство.

$$\ln y = u(x) \cdot \ln a \qquad \frac{y'}{y} = u'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot u'(x) \cdot \ln a \; .$$

В частном случае $\left(e^x\right)' = e^x.$

4) Тригонометрические функции

1) $$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x.$$

Доказательство. $$\Delta y = \sin\left(x + \Delta\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

2) Аналогично $$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x.$$

3) $$y = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Доказательство. $$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4) Аналогично $$y = \operatorname{ctg} x \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5.6 Производная обратной функции

Теорема 5.3. Если $y = f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a,b]$ и $f'(x) \neq 0$ на (a,b), то существует обратная функция $x = \varphi(y)$.

Доказательство.

По определению $x'_y = \varphi'(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x)}.$

Производные обратных функций

1) $$y = \arcsin x \qquad x = \sin y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Аналогично $$y = \arccos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $$y = \operatorname{arctg} x \qquad x = \operatorname{tg} y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Аналогично $$y = \operatorname{arcctg} x \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5.7 Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)' = 0,\ C$ - постоянная;

$(x)' = 1;$

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R;$

$(1/x)' = -1/x^2;$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(e^x\right)' = e^x;$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x;$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad |x|>1;$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(1(x))' = \delta(x);$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x.$$

Правила дифференцирования

Пусть существуют u', v'. Тогда

$$(Cu)' = Cu' \quad (C = \mathrm{const}); \qquad d(C \cdot u) = C \cdot du;$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \qquad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \qquad d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Производная сложной функции: $y = f(u),\ u = u(x),\ y = f(u(x))$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$