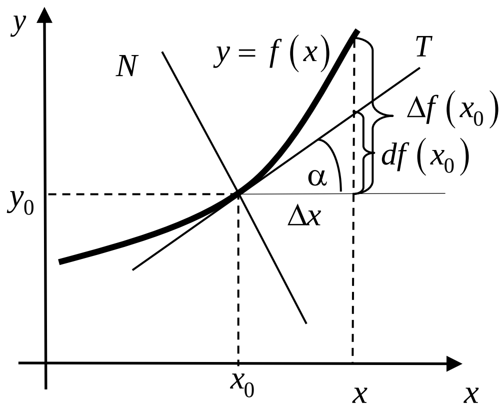
ЛЕКЦИЯ 8

5. Дифференцирование функции одной действительной переменной



5.1. Понятие производной. Механический и геометрический смысл производной. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Если x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное) такое, что $x_0 + \Delta x \in O_\delta(x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 5.1. ***Производной функции*** $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента $\Delta x \to 0$.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначения $\qquad y'(x_0),\ f'(x_0),\ \dfrac{df(x_0)}{dx},\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$

Производная функции в произвольной точке x обозначается

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x).$$

Производная является функцией аргумента x.

Определение 5.2. Если функция f определена в левой (правой) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \left(\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной производной слева (справа) функции f в точке x_0 и обозначается

$$f'(x_0 - 0) \qquad \left(f'(x_0 + 0) \right).$$

Левую и правую производную называют ***односторонней производной***.

Если функция f определена в окрестности точки x_0 и существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$.

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ необходимо вычислить:

1) придав фиксированному аргументу $x \in D(f)$ приращение Δx, вычислить значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2) Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3) Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

4) Найти предел при стремлении $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Примеры нахождения производной. Найти производную функции:

Пример 57. $y = x$.

Решение. 1) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; 4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Пример 58. $y = x^3$.

Решение. 1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$;

2) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$; 3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$.

Пример 59. $y = \cos x$.

1) $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$.

Механический смысл производной

Средняя скорость изменения функции $y = f(x)$

$$v_{cp} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Мгновенная скорость $v = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$.

1) Материальная точка M движется неравномерно и $y = s(t)$ - расстояние от некоторой начальной точки M_0. Тогда мгновенная скорость движения в момент t $$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

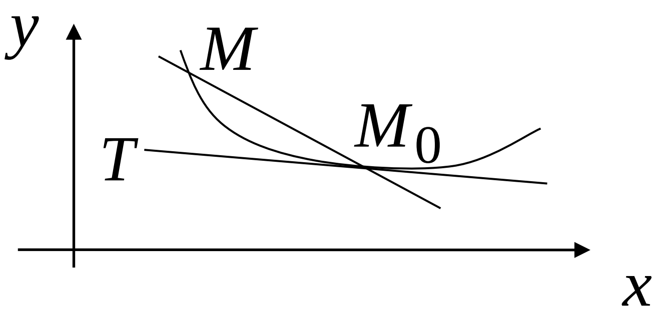
2) Пусть $y = v(t)$ - скорость неравномерного движения. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в момент t

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

3) Пусть $y = q(t)$- функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Геометрический смысл производной



Определение 5.3. Касательной к кривой L в точке M_0 называется прямая M_0T, которая есть предельное положение секущей M_0M при стремлении $M \to M_0$ по кривой.

Угловой коэффициент секущей M_0M $$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для касательной $$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

т.е. производная равна тангенсу угла наклона касательной.

Уравнения касательной и нормали

к кривой $y = f\left(x\right)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ - касательная;}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ - нормаль.}$$

Углом между кривыми называется угол между касательными в точке пересечения. Линии называются ортогональными, если пересекаются под прямым углом.

Пример 60. Найти угол, под которым $y = \sin x$ пересекает ось Ox в начале координат.

Решение. $y' = \cos x \quad y'(0) = 1 \quad \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$