ЛЕКЦИЯ 7

Примеры решения. Вычислить пределы

3) Дробь, содержащая тригонометрические функции

1-й замечательный предел и тригонометрические функции

Пример 39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}3x\sim 3x\\ \operatorname{tg}^2 3x\sim (3x)^2\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{2x}=0.$

Пример 40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x^4}{5x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin x}{x}+x^2\right)=\dfrac{1}{5}.$

Пример 41.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\left|\begin{array}{l}\sin x\sim x\\ \sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}=\infty.$$

Раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad x_0 \notin D(f).$$

Чаще всего $x_0 = \infty$, а $f(x)$ - дробь рациональная или иррациональная.

Выделяют в числителе x^{α}, в знаменателе x^{β}, $\alpha, \beta \in R$.

1) Рациональная дробь $f(x) = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$ $\quad x_0 = \infty$.

$$f(x) = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

Примеры решения. Вычислить пределы

Пример 42. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x+4}{x^5+6x+7} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \left| ч=3, з=5, ч<з \right| = 0$.

Пример 43. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+5x^2+3}{7x^3+6x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \left| ч=3, з=3, ч=з \right| = \dfrac{4}{7}$.

Пример 44. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+2x+3}{x^2+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \left| ч=4, з=2, ч>з \right| = \infty$.

2) Иррациональная дробь.

В числителе и знаменателе выделяют x^α, x^β, где α, β - максимально возможные показатели.

Пример 45. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+3}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x\sqrt[3]{1+3/x^3}} = 1$.

Раскрытие неопределенности вида $(0\cdot\infty)$. Сводится к $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 46. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\operatorname{tg}x+2x^2)$.

Решение. $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\operatorname{tg}x+2x^2)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+2x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}+2\right)=\left|\operatorname{tg}x\sim x\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}+2\right)=\infty.$$

Раскрытие неопределенности $(\infty-\infty)$.

Преобразуется к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Пример 47. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=(\infty-\infty)$.

Домножим числитель и знаменатель на сопряженное.

После преобразований получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\text{ч}=1,\text{з}=1,\text{ч}=\text{з}\right|=\frac{5}{2}.$$

Раскрытие неопределенности $\left(1^{\infty}\right)$

Неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$ получается при вычислении

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\varphi(x))^{\psi(x)}, \text{ если } \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1; \ \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \infty.$$

Преобразуем, полагая $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$ и используя 2-ой замечательный предел

$$\lim_{x\to x_0} (\varphi(x))^{\psi(x)} = \lim_{x\to x_0} \left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right)^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\psi(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} (\varphi(x)-1)\psi(x)}.$$

Имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$.

Примеры решения. Вычислить пределы

Пример 48. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e$.

Пример 49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}x}=e^{2}$.

Замечание. *Для раскрытия неопределенностей* $\left(0^{0}\right)$ *и* $\left(\infty^{0}\right)$ *целесообразнее использовать правило Лопиталя*.

4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Непрерывность функции в точке и на множестве

Определение 4.1. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполнены три условия

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если нарушается хотя бы одно из условий, то функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0, а точка x_0 - ***точка разрыва***.

Односторонняя непрерывность

Определение 4.2. Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется ***непрерывной слева (справа) в точке*** x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$.

Другими словами

а) $f(x)$ непрерывна справа в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

б) $f(x)$ непрерывна слева в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Функция непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ когда она непрерывна слева и справа.

Определение 4.3. Функция $f(x)$, непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется ***непрерывной на этом множестве***.

Если $X=[a;b]$, то для непрерывности функции $f(x)$ требуется, чтобы она была непрерывна $\forall x \in (a,b)$; непрерывна слева в точке b и непрерывна справа в точке a.

4.2. Точки разрыва функции и их классификация

Если хоть одно из условий **определения 4.1.** не выполнено, то x_0 - точка разрыва.

1) Если условие 2 выполнено, но $x_0 \notin D(f)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то устранимый разрыв.

2) Если условие 2 нарушено, но существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то разрыв 1-го рода, а разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции $f(x)$ в точке x_0.

3) Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, то разрыв 2-го рода.

Для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы.

Примеры решения задач. Установить точки разрыва функции и характер разрыва функции в них.

Пример 50. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. $D(f)=R\setminus\{0\}$, $x_0=0$- точка разрыва функции.

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, т.е. в точке $x_0=0$- устранимый разрыв.

Если доопределим функцию $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \forall x\neq 0,\\ 1 & x=0\end{cases}$, то функция

станет непрерывной.

Пример 51. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

Решение. $D(f)=R\setminus\{1\}$, $x_0=1$- точка разрыва функции.

$$\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x=1-\delta\\ \delta>0}}\frac{1}{x-1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1-\delta-1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{-1}{\delta}=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 1+0\\ x=1+\delta\\ \delta>0}}\frac{1}{x-1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\delta-1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}=\infty.$$

$x_0=1$ - точка разрыва 2-го рода.

Пример 52. $f(x)=\begin{cases}-x & \forall x\le 0,\\ x^2+1 & \forall x: 0<x\le 1,\\ 2 & \forall x>1.\end{cases}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0\ne\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$. $x_0=0$ - точка разрыва 1-го рода. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1-0=1$ - скачок.

Пример 53. $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$

Решение. $D(f) = R \setminus \{2\}$, $x_0 = 2$- точка разрыва функции.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2-0 \\ x=2-\delta \\ \delta>0}} 9^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{\delta\to 0} 9^{\frac{1}{\delta}} = \infty$$

разрыв 2-го рода.

4.3. Действия над непрерывными функциями

Непрерывность основных элементарных функций

Теорема 4.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то

1) $f(x) \pm g(x)$ - непрерывны в x_0.

2) $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывны в x_0.

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывны в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Δ **Докажем 2.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0).$$

Это обобщается на конечную сумму функций.∇

Теорема 4.2. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \qquad a_k \in R \quad k = \overline{0,n}$ является функцией непрерывной $\forall x \in R$.

Теорема 4.3. Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна $\forall x \in R$, для которой $Q(x) \neq 0$, где $P(x), Q(x)$ - многочлены.

Теорема 4.4. Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке x_0 функций, непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Докажем для случая двух непрерывных функций f и g.

$y = f(u)$, $u = g(x)$.

По определению $y = f \circ g \Leftrightarrow y = f(g(x)) = F(x)$. Пусть $x \to x_0$.

Из непрерывности $g(x)$ следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = u_0$, т.е. $u \to u_0$.

Поскольку $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$.

Теорема 4.5. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Теорема 4.6. Основные элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих области определения.

Отсюда следует (из **теорем 4.1÷4.6**), что всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.

4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 4.7 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на этом отрезке она ограничена и достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на отрезке существует по крайней мере две точки c_1 и c_2, такие, что

$$f(c_1) = \inf_{[a,b]} f(x); \qquad f(c_2) = \sup_{[a,b]} f(x).$$

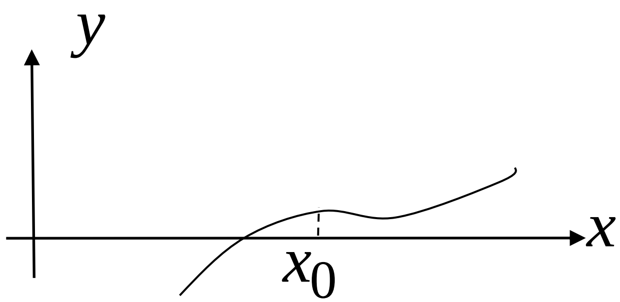
Пример 54. Функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[-2,3]$.

$$f(0) = 0 = \inf_{[-2;3]} f(x), \qquad f(3) = 9 = \sup_{[-2;3]} x^2.$$

Но, если $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то может быть неограниченной.

Пример 55. Функция $f\left(x\right)=\operatorname{tg}x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

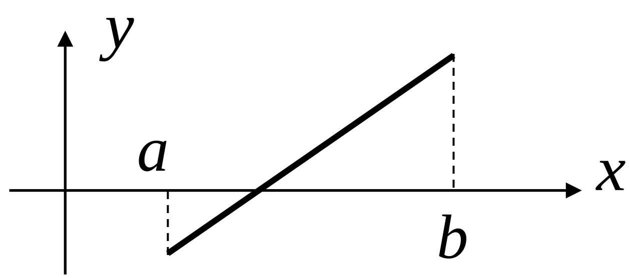
Теорема 4.8. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.



Теорема 4.9 (Больцано-Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой значение функции равно 0:

$$f(x):\ f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b): f(x_0)=0.$$

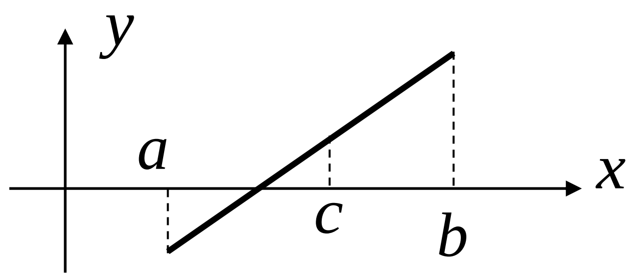
Геометрический смысл



Замечание. Если функция монотонна, то $\exists^1 x_0 \in (a;b): f(x_0)=0$.

Теорема 4.10 (о промежуточных значениях). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)=A< f(b)=B$. Тогда $\forall C: A<C<B\ \exists c: c\in[a;b]\wedge f(c)=C$.

Теорема геометрически очевидна.



Определение 4.4. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на отрезке*** $[a;b]$. если она непрерывна во всех внутренних точках (a,b), за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых функция имеет разрыв 1-го рода или устранимый разрыв и, кроме того, она имеет односторонние пределы в точках a и b.

Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на числовой прямой, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке этой прямой.

Пример 56. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ кусочно-непрерывна на числовой прямой.