ЛЕКЦИЯ 6

Теорема 3.12. Произведение бесконечно малой функции и функции, ограниченной в окрестности $\dot{O}_\delta(x_0)$, есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ ограничена в $\dot{O}_\delta(x_0)$, т.е.

$\exists M > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(x) \Rightarrow |\varphi(x)| \le M$.

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

Тогда $\quad \forall \dfrac{\varepsilon}{M} > 0 \; \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \dot{O}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Возьмем $\delta = \min(\delta, \delta_1)$, тогда $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ и $|\varphi(x)| < M \;\; \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0)$.

Рассмотрим произведение $\alpha(x) \cdot \varphi(x)$ в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

$|\alpha(x) \cdot \varphi(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$, т.е. $\alpha(x) \cdot \varphi(x)$ - бесконечно малая

функция.

Следствие 1. Произведение некоторого числа и бесконечно малой функции в $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть бесконечно малая функция.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых функций в $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть бесконечно малая функция.

Теорема 3.13. Частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ в $\dot{O}_\delta(x_0)$ на функцию $\varphi(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция.

Доказательство: Т.к. $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция, то

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Рассмотрим $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$. $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{0}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = 0$.

Сравнение асимптотического поведения функций

Под асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки $x_0 \in R$ понимают описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Определение 3.16. Если $\alpha(x), \beta(x)$ - бесконечно малые функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, то они называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***. Принято обозначение $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

Пример 26. Сравнить функции $\alpha(x) = \sin 3x$, $\beta(x) = 2x$, при $x \to 0$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x} = \dfrac{3}{2} \neq 0$.

Т.е. $2x = O(\sin 3x)$ и $\sin 3x = O(x)$ при $x \to 0$, функции одного порядка малости.

Если $\alpha(x),\beta(x)$ - бесконечно большие функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, то они называются ***бесконечно большими функциями одного порядка роста при*** $x\to x_0$.

Определение 3.17. Если функции $\alpha(x),\beta(x)$ - бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то они называются ***эквивалентными при стремлении*** $x\to x_0$ или ***асимптотически равными***.

Обозначается $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Пример 27. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Некоторые эквиваленты:

Если $\alpha(x): \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то при $x \to x_0$ справедливо

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

$\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\alpha(x)$; $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{1}{n}\alpha(x)$;

$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

Теорема 3.14. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е. если при $x \to x_0$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$,

то $$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство. Запишем $$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)},$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 28. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

Решение. $\sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0+0$.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{2x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+0}2\sqrt{x}=0.$$

Пример 29. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\ln(5-x^2)}$.

Решение. при $x \to 2$ $\ln(5-x^2)=\ln(1+(4-x^2)) \sim 4-x^2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\ln(5-x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)(2+x)}=-\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2+x}=\frac{1}{4}.$$

Определение 3.18. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при стремлении $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$, т.е. $o(1)$ - множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Пример 30. Сравнить функции $\alpha(x)=x^5$, $\beta(x)=\sin x^3$.

Решение. При $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,

т.е. $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Определение 3.19. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - бесконечно малые и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$ $k > 0$, то $\alpha(x)$ называется функцией *k*-того порядка малости по сравнению с функцией $\beta(x)$.

В частности, если $\alpha(x)$, $\beta^k(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to x_0$, то $\alpha(x)$ - функция *k*-того порядка малости по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Пример 31. $\alpha(x)=\dfrac{4}{2+x}$, $\beta(x)=2-x$. Доказать, что функция $\alpha(x)-\beta(x)$ 2-го порядка малости по сравнению с x при стремлении $x\to 0$.

Решение. $\alpha(x)-\beta(x)=\dfrac{4}{2+x}-2+x=\dfrac{4-4+2x-2x+x^2}{2+x}=\dfrac{x^2}{2+x}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - бесконечно большие функции при стремлении $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\neq 0$ $k>0$, то $\alpha(x)$ функция k-того порядка роста по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Пример 32. Определить порядок роста бесконечно большой функции $f(x) = x^3 + 12x + 3$ относительно x при стремлении $x \to \infty$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 12x + 3}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}\right) = 1$, т.е. порядок роста $f(x)$ по сравнению с x при стремлении $x \to \infty$ равен 3.

3.7. Основные приемы раскрытия неопределенностей

Раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Если $f(x)$ - дробь, числитель и знаменатель которой содержит множитель $(x-x_0)^\alpha$, $\alpha \in R$, то для вычисления предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x_0 \notin D(f)$ нужно выделить в числителе и знаменателе дроби множители $(x-x_0)^\alpha$ и преобразовать функцию к виду $f(x)=(x-x_0)^\alpha f_1(x)$.

Тогда $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^\alpha f_1(x) = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ f_1(x_0), & \alpha = 0, \\ \infty, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Примеры решения. Вычислить пределы

1) Рациональная дробь

Пример 33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x+1)}{x^2(x+2)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{x+1}{x+2}=0$.

Пример 34. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{1}{7}$.

Пример 35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}=\infty$.

2) Иррациональная дробь

Пример 36. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0.$

Пример 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+\sqrt{x+4})}{4-x-4}=-4.$

Замена переменных $x+4=t^2$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^2-4}{2-t}=-\lim\limits_{t\to 2}\frac{(2-t)(2+t)}{2-t}=-4.$$

Пример 38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\infty.$