ЛЕКЦИЯ 5

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$.

Примеры 19.

1) $f(x) = \sin x$ бесконечно малая при $x \to 0$,

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - бесконечно малая при $x \to \infty$,

- бесконечно большая при $x \to 0$.

Теорема 3.5 Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ бесконечно малая.

Справедливо и обратное утверждение.

3.4 Основные теоремы о пределах

Теорема 3.6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ сходятся в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot a$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\left|b\neq 0\right|=\dfrac{a}{b}$.

Пункты 1,3 верны для любого количества слагаемых или сомножителей.

При вычислении $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right)$, в случае бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, теорема о пределе суммы (разности) функций непосредственно не применима. В этом случае говорят, что выражение $\left(f(x) \pm g(x) \right)$ при $x \to x_0$, представляет собой ***неопределенность*** вида $\{\infty - \infty\}$. Аналогично возникают неопределенности вида $\left\{ \dfrac{\infty}{\infty} \right\}$, $\left\{ \dfrac{0}{0} \right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$ и т. д. Вычисление пределов в этих случаях называется ***раскрытием неопределенности***.

Теорема 3.7. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел y_0, то $f(x) - y_0$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Рассмотрим $f(x) - y_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - y_0 \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} y_0 = y_0 - y_0 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) - y_0$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Следствие. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел y_0, то в окрестности точки x_0 она представима в виде $f(x) = y_0 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Теорема 3.8. (о сравнении функций).
Если в окрестности точки x_0 справедливо функциональное неравенство $f(x) \le g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Теорема 3.9.
Если в окрестности точки x_0 справедливы функциональные неравенства $h(x) \le f(x) \le g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Доказательство: По условию $h(x) \le f(x) \le g(x)$.
Согласно теореме 3.8. $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ или $y_0 \le \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le y_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Теорема 3.10.
Если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u\left(x\right)=u_0,\ \lim\limits_{u\to u_0} f\left(u\right)=y_0$, то существует предел сложной функции $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(u\left(x\right)\right)=\lim\limits_{u\to u_0} f\left(u\right)=y_0$.

Пример 20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $f\left(u\left(x\right)\right)=\sin u,\ u\left(x\right)=x^2+\frac{\pi}{2}.\ \lim\limits_{x\to x_0} u=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{u\to\frac{\pi}{2}}\sin u=1.$$

3.5 Замечательные пределы

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Используется для раскрытия неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Примеры. Вычислить пределы

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{\operatorname{tg} 2x}\cdot\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}.$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\cdot\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\right)=1\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Часто используются следующие формулы, являющиеся следствием ***второго замечательного предела***:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ (a>0,\ a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0,\ a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Примеры. Вычислить пределы

24) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x/k}\right)^k = e^k.$$

25) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right)^x} = \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5.$$

3.6. Свойства бесконечно малых функций

Сравнение асимптотического поведения функций.

Свойства бесконечно малых функций

Приведем ряд теорем.

Теорема 3.11. Конечная сумма бесконечно малых функций в окрестности $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть функция, бесконечно малая в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

Доказательство: Если $\alpha_i(x),\ i=\overline{1,n}$ - бесконечно малые функции в $\dot{O}_\delta(x_0)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0,\ \overline{i=1,n}$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0$, то теорема справедлива.