ЛЕКЦИЯ 4

2.8. Простейшие методы построения графиков в декартовой системе координат

Пусть L - график функции $y = f(x)$ в Oxy. Тогда:

1) График функции $y = -f(x)$ получен зеркальным отображением L относительно оси Ox.

2) График функции $y = f(-x)$ получен зеркальным отображением L относительно оси Oy.

3) График функции $y = f(x-a)$ получен смещением вправо L по оси Ox.

4) График функции $y = f(x)+b$ получен смещением L по оси Oy.

5) График функции $y = f(kx)$ получен сжатием L по оси Ox.

6) График функции $y = Af(x)$ получен растяжением L по оси Oy.

7) График функции $y = Af(k(x-a))+b$ - общая формула.

Пример 14. $y = 3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Линейная комбинация графиков: $\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)$; **нелинейная:** $f_1(x)\cdot f_2(x)$.

3. ПРЕДЕЛЫ

3.1. Числовая последовательность и ее предел

Если $\forall n \in N$ поставлено в соответствие $u_n = f(n)$, то говорят, что на множества N задана числовая последовательность (числовая функция) $f : N \to R$.

$u_n = f(n)$ - формула общего члена последовательности.

Примеры 15. $\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right)$; $\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \left(2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \ldots\right)$;

$\left((-1)^n\right) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$; $(\sin n\alpha) = (\sin\alpha, \sin 2\alpha, \ldots)$. $(n) = (1, 2, 3, \ldots)$

Свойства последовательностей

1) $\{u_n\}$ - ограничена снизу $\Leftrightarrow \exists m \in R : u_n \geq m \ \forall n \in N;$

2) $\{u_n\}$ - ограничена сверху $\Leftrightarrow \exists M \in R : u_n \leq M \ \forall n \in N;$

3) $\{u_n\}$ - ограничена $\Leftrightarrow \exists m, M \in R : m \leq u_n \leq M \ \forall n \in N;$

4) $\{u_n\}$ - возрастает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} < u_{n_2};$

5) $\{u_n\}$ - убывает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} > u_{n_2};$

6) $\{u_n\}$ - не убывает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} \leq u_{n_2};$

7) $\{u_n\}$ - не возрастает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} \geq u_{n_2}.$

Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Предел числовой последовательности

Определение. Число A называют пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in N : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - A| < \varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in N : \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - A| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***.

Пример 16. $(u_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

$$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow N_\varepsilon = 99; \quad \varepsilon = 0{,}001 \Rightarrow N_\varepsilon = 999.$$

Существуют бесконечно большие последовательности.

Примеры 17. а) (n); б) $(-n)$; в) $\left((-1)^{n+1}n\right)$.

Определение. Последовательность имеет бесконечно большой предел, если:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in R_- \quad \exists N_M \in N: \; \forall n > N_M \Rightarrow u_n < M$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in R_+ \quad \exists N_M \in N: \; \forall n > N_M \Rightarrow u_n > M$

Определение. Последовательность называется бесконечно малой, если

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N: \; \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Примеры 18. а) $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; б) $(u_n) = \left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Теоремы о числовых последовательностях:

1. Если последовательность сходится, то она ограничена (необходимый признак сходимости).
2. Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится (достаточный признак сходимости).
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in N: \ \forall n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in N: \ \forall n > n_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon.$$

Пусть $n_0 = \max(n_1, n_2) \Rightarrow \forall n > n_0$

$$\begin{pmatrix} a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \\ a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \end{pmatrix} \bigcap (x_n \le y_n \le z_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теорема.

Если последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b,$ то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n \pm v_n\right) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c\cdot u_n\right) = c\cdot a;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n\cdot v_n\right) = a\cdot b;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \left|\lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n\right) \neq 0\right| = \dfrac{a}{b}.$

3.2. Предел числовой функции

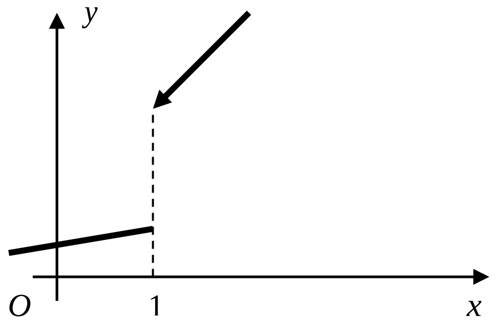
Определение 3.5. Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 $(x \to x_0)$ (обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \ \forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Односторонние пределы функции

Определение 3.6. Число A называется ***левым пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 :\ \forall x :\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

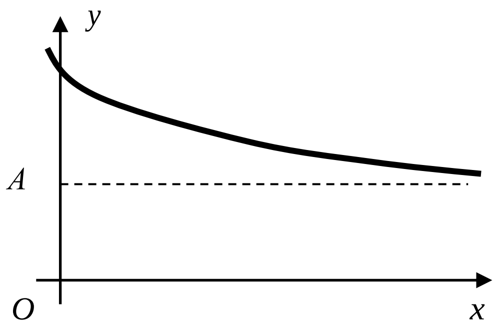
Определение 3.7. Число A называется ***правым пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 :\ \forall x :\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$



Конечный предел функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Определение 3.8. Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) (обозначается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$)), если

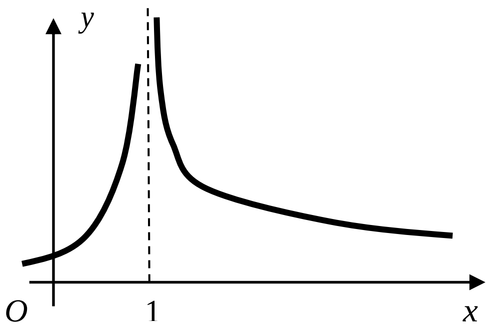
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x > M \ (x < -M) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$



Бесконечный предел функции при $x \to x_0$

Определение 3.9. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечным, если

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \to |f(x)| > M.$$



Бесконечный предел функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Определение. 3.10 Предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, (или $x \to -\infty$) называется бесконечным, если

$$\forall M > 0 \quad \exists X > 0: \quad \forall |x| > X \ \rightarrow |f(x)| > M.$$