ЛЕКЦИЯ 3
2.5. Классификация функций

1) Целые рациональные функции:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2) Дробно-рациональные функции:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

Совокупность 1) и 2) – класс рациональных функций.

3) Иррациональные функции: - получаются с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями.

$$y = \sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{x}.$$

Совокупность 1), 2) и 3) – класс алгебраических функций.

4) Трансцендентные функции: sin x, ln x, ch x и т. д.

2.6. Функции, заданные параметрически

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in T.$$

t – называется параметром.

Если **φ** - монотонна, то $\exists\ t=\varphi^{-1}(x)$.

Тогда $$y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Всякую явно заданную функцию можно представить параметрически

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t,\ \ t\in T\\ y=f(t).\end{cases}$$

Пример 10. $y=\frac{1}{x},\ D(f)=(0,\infty).$

а) Введем $t=x.$

Тогда $x=t,\ t\in(0;\infty),$

$$y=\frac{1}{t}.$$

б) Введем $x=e^{t}.$

Тогда $x=e^{t},\ t\in R,$

$$y=e^{-t}.$$

Параметрическое задание линий на плоскости

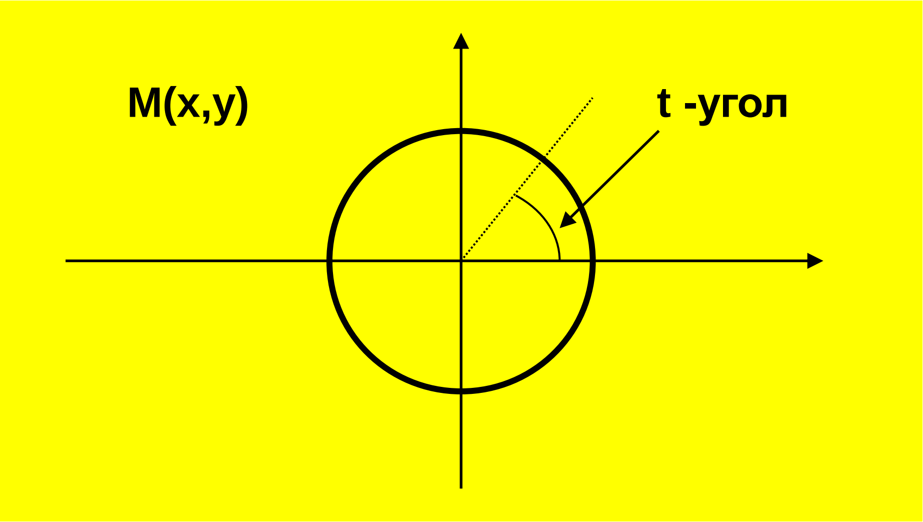
Множество точек **M(x,y)** плоскости R^2, координаты которых удовлетворяют **x=x(t), y=y(t), t∈T,** параметрически задают линию

Прямая: $L \in R^2$.

$$y = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \ t \in R, \\ y = at + b. \end{cases}$$

Окружность с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t, \ 0 \le t < 2\pi, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$



Парабола:

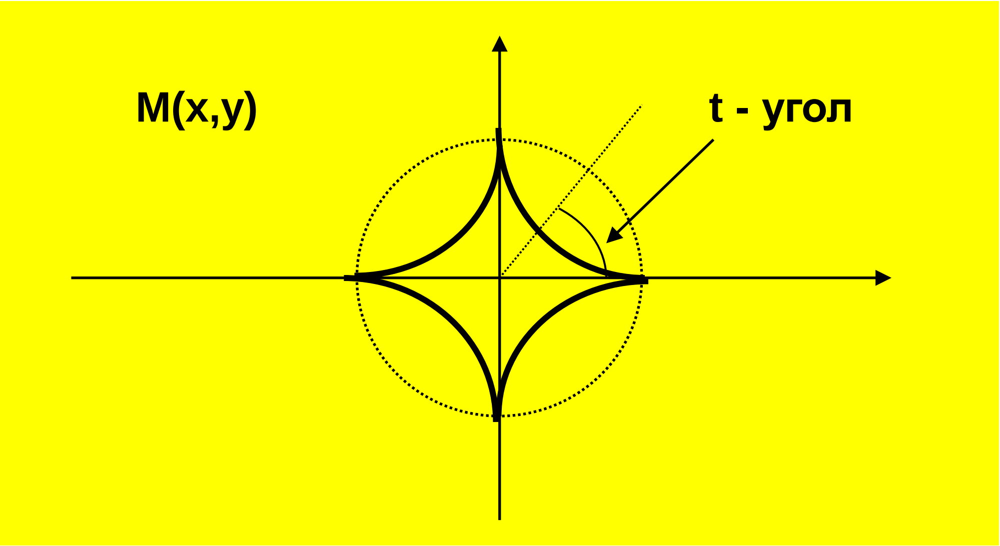
$$y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \ t \in [0; \infty), \\ y^2 = 2pt. \end{cases}$$

Гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \ t \in R, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

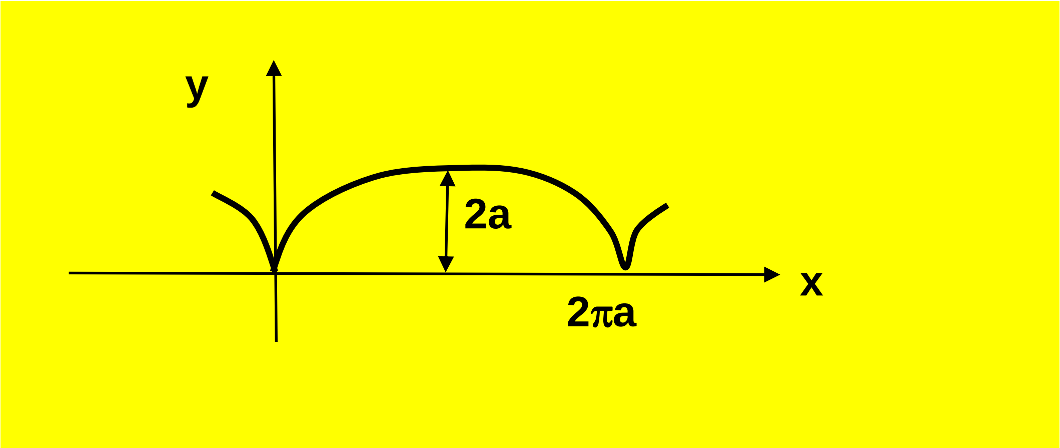
Астроида

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ (a=4r)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos^3 t,\ 0\le t<2\pi,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$

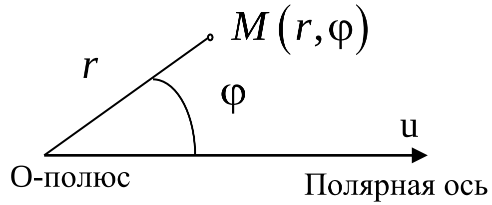


Циклоида

$$x = a(t - \sin t),\ t \in R,$$
$$y = a(1 - \cos t).$$



2.7. Полярная система координат



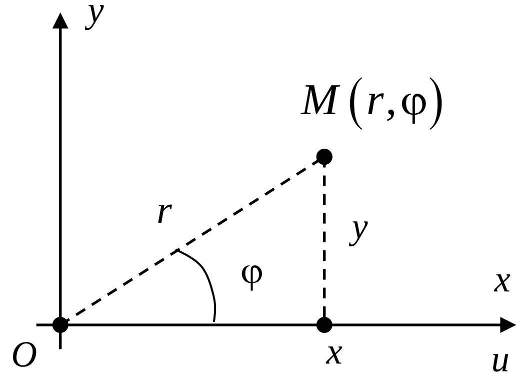
$r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус;

$\varphi(M)$ - полярный угол, принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$.

Значение φ: $0\le\varphi<2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi<\varphi\le\pi$).

Положение любой точки определяется заданием $r,\ \varphi\ (0\le r<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi)$.

Связь декартовых и полярных координат



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Уравнение линии в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$ или $F(r, \varphi) = 0$.

Уравнения некоторых линии в полярной системе координат

1. а) Прямая, проходящая через начало координат.

$y = kx$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow r\cos\varphi = kr\sin\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = k$.

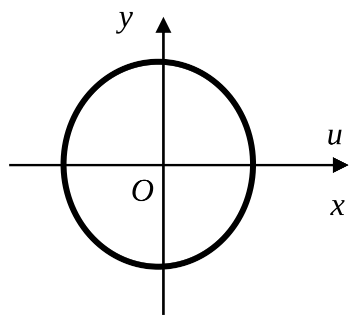
1. б) Прямая, не проходящая через начало координат

$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$ p - расстояние от прямой до полюса;

α - угол наклона нормального вектора прямой $\overline{n}(A, B)$.

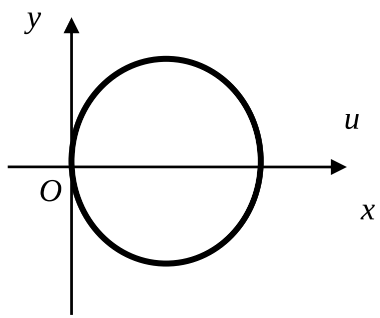
2) Окружность

а)



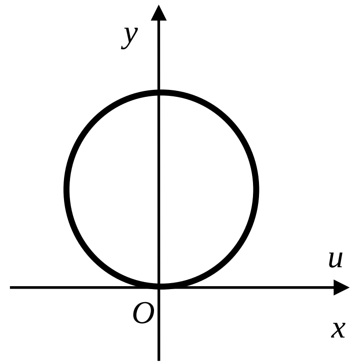
$$x^2 + y^2 = a^2 \iff r = a;$$

б)



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \iff r = 2a\cos\varphi;$$

в)



$$x^2 + (y-a)^2 = a^2 \iff r = 2a\sin\varphi.$$

3) Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола)

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

p - параметр;

ε - эксцентриситет.

$\varepsilon<1$ - эллипс (полюс в левом фокусе),

$\varepsilon>1$ - гипербола (полюс в правом фокусе),

$\varepsilon=1$ - парабола.

Переход к декартовым координатам.

Подставить в уравнение $r=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

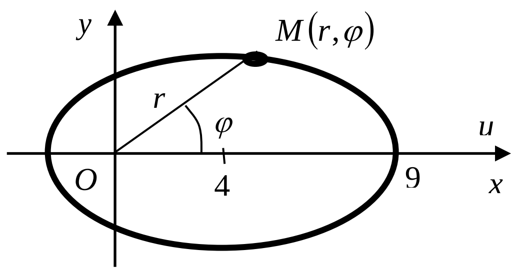
Пример 11.

$r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$, $\qquad r = \dfrac{9/5}{1 - 4/5\cos\varphi}$ - эллипс, $\qquad \varepsilon = \dfrac{4}{5} < 1.$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{4}{5}x},$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{5}+\frac{4}{5}x \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{81}{25}+\frac{72}{25}x+\frac{16}{25}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{25}x^2+y^2-\frac{72}{25}x = \frac{81}{25} \Rightarrow \frac{9}{25}(x-4)^2+y^2 = \frac{225}{25}, \qquad \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1.$$

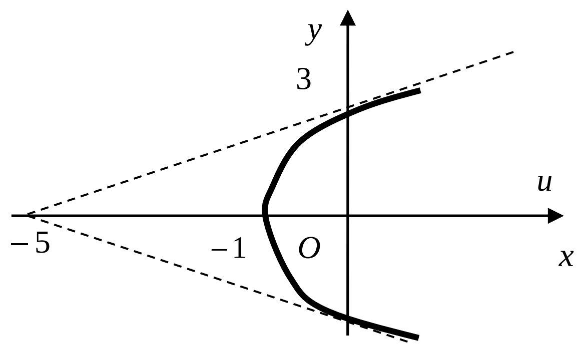


Пример 12.

$r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$, $\quad r=\dfrac{9/4}{1-5/4\cos\varphi}$ - гипербола, $\quad \varepsilon=\dfrac{5}{4}>1.$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4}+\frac{5}{4}x\Rightarrow$$

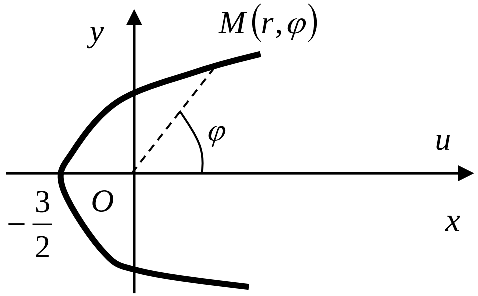
$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{81}{16}+\frac{90}{16}x+\frac{25}{16}x^2\Rightarrow\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$



Пример 13.

$r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$ - парабола, $\varepsilon = 1$.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3+x \Rightarrow y^2 = 9+6x.$$



4) Розы – семейство кривых, заданных в виде $r = a\sin k\varphi$ или $r = a\cos k\varphi$.

$a,\ k$ - положительные числа.

$\forall\ \ a,\ k,\ \varphi \qquad\qquad r \le a.$

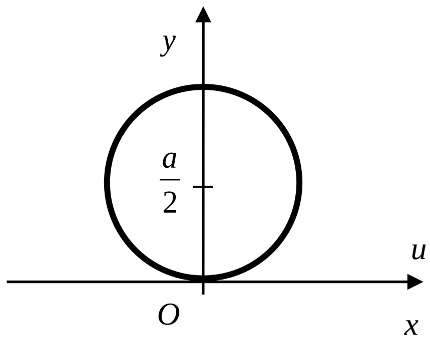
а) $k = 0$:

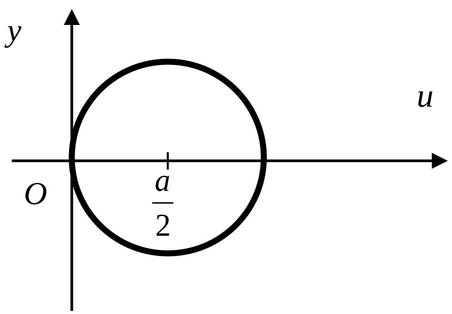
1-е уравнение – точка совпадает с полюсом,

2-е уравнение – окружность радиуса a.

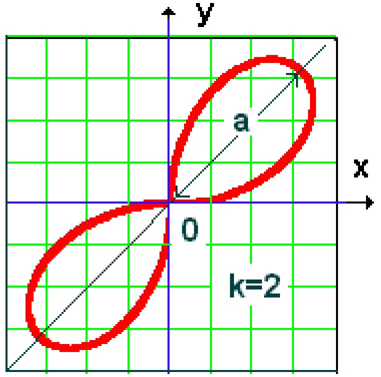
б) $k = 1$:

$r = a\sin\varphi$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $r = a\cos\varphi$

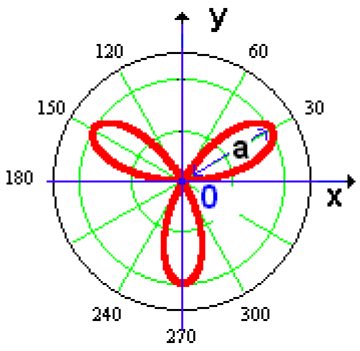




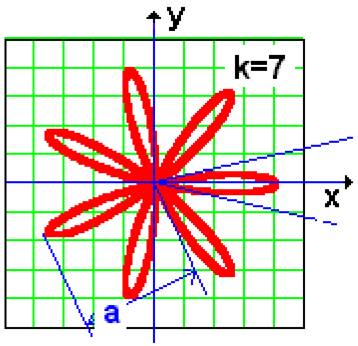
в) $k = 2, \quad r = a\sin 2\varphi$



$k = 3, \quad r = a\sin 3\varphi$

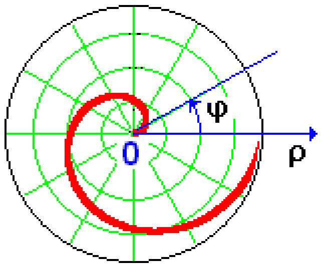


$k = 7, \quad r = a\cos 7\varphi$



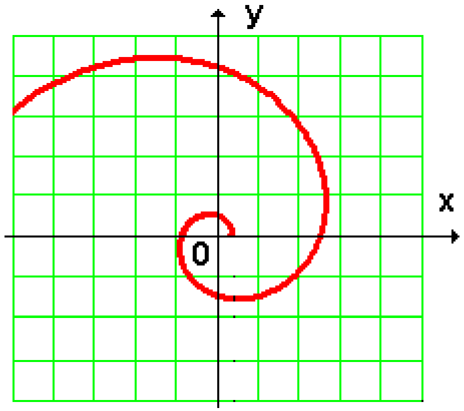
5) Спирали

а) Спираль Архимеда $r = a\varphi$ $D(r) = [0;+\infty)$, $E(r) = [0;+\infty)$.



б) Гиперболическая спираль

$r = a^{\varphi}$, $a > 0$. $D(r) = R$, $E(r) = (0,\infty)$



в) Синусоидальные спирали

$$r^m = a^m \sin m\varphi \quad \textit{или} \quad r^m = a^m \cos m\varphi$$

$m=1$ - окружности;

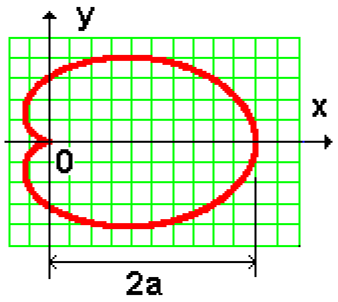
$$m = \frac{1}{2}, r = a\cos^2\frac{\varphi}{2} \;\Rightarrow\; r = \frac{a}{2}(1+\cos\varphi)$$

$$r = a\sin^2\frac{\varphi}{2} \;\Rightarrow\; r = \frac{a}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$m = 2, r^2 = a^2 \sin 2\varphi \; \textit{или} \; r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

6) Кардиоида

$$r = a(1+\cos\varphi)$$



7) Лемниската Бернулли

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$