ЛЕКЦИЯ 2

1.4. Числовые множества

Множество натуральных чисел N

N = {1, 2, 3, …}.

Свойства:

1) $\forall n_1, n_2 \in N \Rightarrow n_1 + n_2 \in N,\ n_1 \cdot n_2 \in N$

выполняются: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность;

2) деление и вычитание не определены;

3) $\mathbf{1 \in N}$;

4) $\mathbf{n \in N \Rightarrow n + 1 \in N}$;

5) если $\mathbf{M \subseteq N}$, $\mathbf{1 \in M}$, $\mathbf{n \in M}$ и $\mathbf{(n + 1) \in M}$, то $\mathbf{M = N}$ (аксиома индукции);

6) $\mathbf{N \subset Z}$ счетно и бесконечно.

Множество целых чисел Z

Z = { …, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

Свойства:

Определены операции сложения, умножения, вычитания; Не определено деление;

Z – упорядоченно, т.е.   имеет место

$$p_1 < p_2 \vee p_1 = p_2 \vee p_1 > p_2;$$

Z – счетно и бесконечно;

N $\subset$ **Z** $\subset$ **Q.**

Множество рациональных чисел Q

Q = { q = p / n | p $\in$ Z , n $\in$ N }.

Свойства:

Определены все арифметические операции;

Q – упорядоченно;

Q – плотно, т. е.

$$\forall q_1, q_2 \in Q \;\; \exists q \in Q: \; q_1 < q < q_2.$$

Q – счетно и бесконечно;

N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ R.

Множество действительных чисел **R**

Свойства:

R – упорядоченно;

R –бесконечно;

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

f – взаимно однозначное отображение $\Leftrightarrow$ $\forall$ **b** $\in$ **B** $\exists$ **a** $\in$ **A** **:** **b = f (a)**

$$\forall a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \Rightarrow f\left(a_1\right) \neq f\left(a_2\right).$$

Если **f** - взаимно однозначное отображение, то можно говорить об обратном отображении.

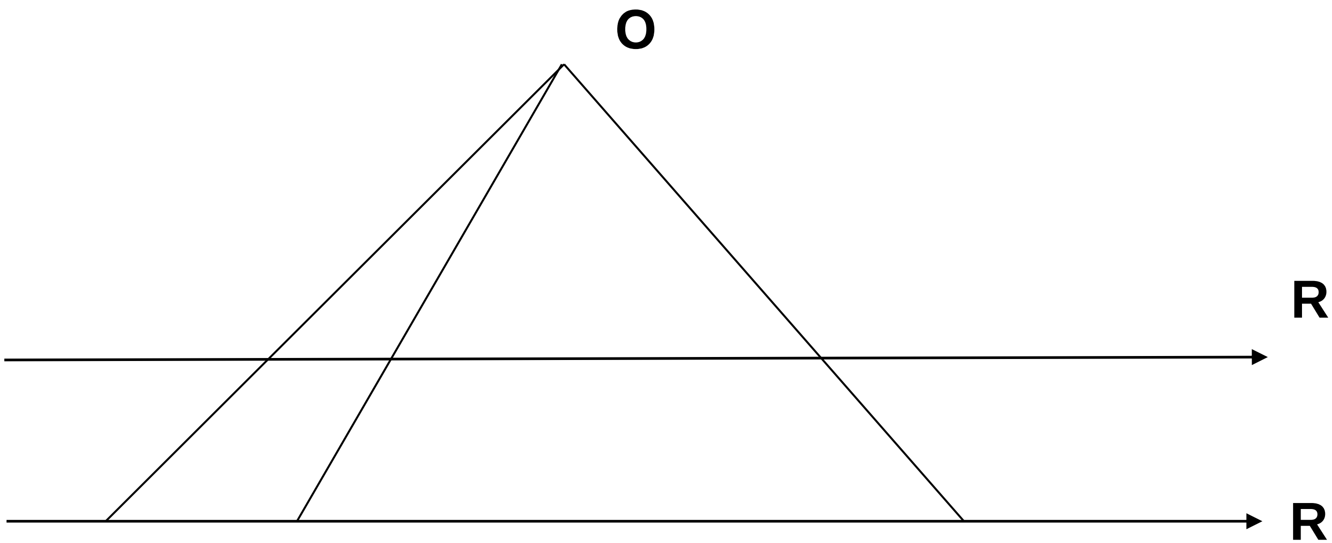
Определение 1.9. Отображение f^{-1} называется обратным к отображению ***f*****,** если

$$a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{f^{-1}} a,$$

т. е. элементу **b** $\in$**B** ставится в соответствие единственный элемент **a** $\in$ **A,** образом которого при отображении ***f*** является **B.**

$$f^{-1}: B \to A \Leftrightarrow \forall b \in B\ \exists^1 a \in A: a = f^{-1}(b)$$

Пример 5.



Определение 1.10. Два множества **A** и **B** называются эквивалентными (равномощными), если $\exists$ хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

Свойства эквивалентности

1) $\mathbf{A \sim A \quad \forall\, A}$ (рефлексивность);
2) $\mathbf{A \sim B \Rightarrow B \sim A \quad \forall\, A, B}$ (симметричность);
3) $\mathbf{A \sim B,\ B \sim C \ \Rightarrow\ A \sim C \quad \forall\, A, B, C}$ (транзитивность).

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел является счетным.

Если множество счетно, то его элементы можно занумеровать.

2.1. Понятие функции. Способы задания

Пусть **D** – произвольное подмножество действительных чисел **($D \subseteq R$).** Если каждому числу **$x \in D$** поставлено в соответствие некоторое единственное вполне определенное действительное число **$y=f(x)$**, то говорят, что на множестве **D** определена числовая функция ***f*.** Множество **D** называют областью определения функции, а множество **$E=\{y \in R \mid y=f(x), x \in D\}$** множество значений функции.

Термины функция, отображение, преобразование – синонимы. $D \xrightarrow{f} E$

Обозначения: **y=*f*(x); *f*: D→E;**

В данной главе рассматриваются функции одной переменной **D⊆R; E⊆R.**

Способы задания функций:

Аналитический, табличный, графический, программный.

Аналитический способ задания функций

С помощью формул $y=\left(\cos x+\ln x\right)/\sin x.$

Частное значение функции: $f\left(x_0\right)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

Область определения либо указывают **D(*f*)=[1;2],** либо определяют.

В последнем случае говорят об естественной области определения функции.

Пример 6. $$y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D(f)=(-2;2),\quad E(f)=(0{,}5;\infty).$$

Составные функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Неявно заданные функции

$$F(x,y)=0$$

Если уравнение можно разрешить относительно **y,** то приходим к явно заданной функции.

Пример 7. $3x-y+2=0, \qquad y=3x+2.$

Табличный способ задания функций

$$x_1, \ x_2, \ldots, x_n$$

$$y_1, \ y_2, \ldots, y_n$$

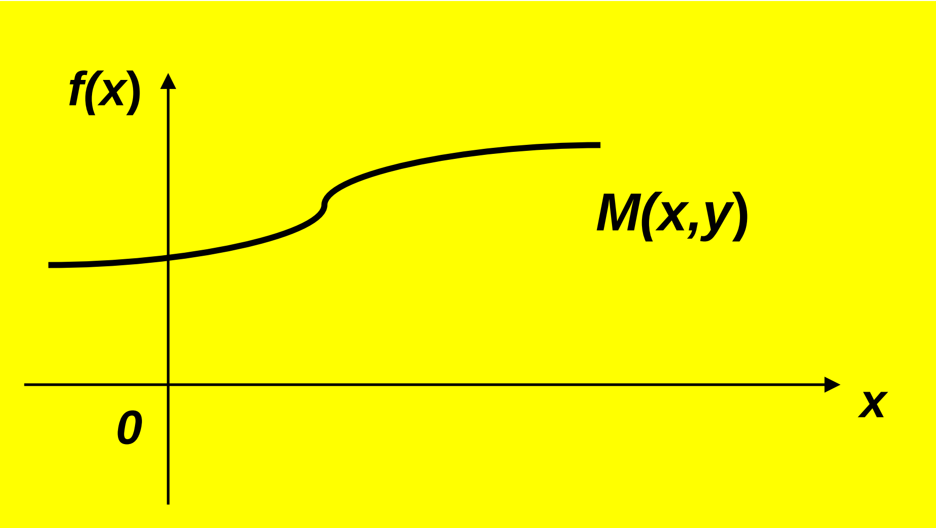
Примеры: таблицы **ln, sin** и т. д.

\+ Точное значение при x_i.

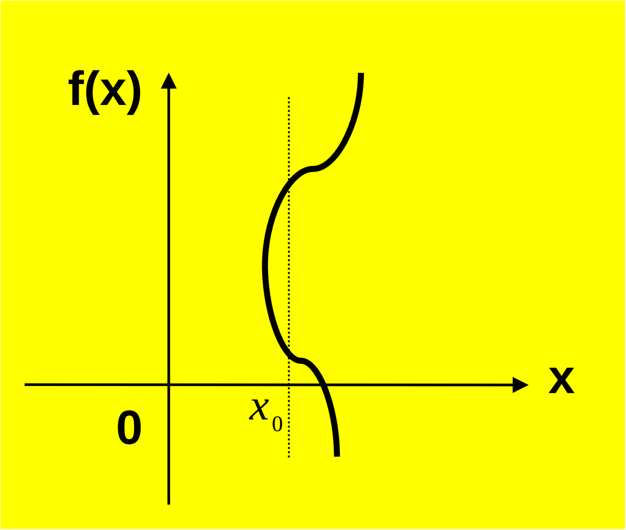
\- Необходимость интерполирования для промежуточных значений.

Графический способ задания функций

$$\Gamma = \left\{ M\left(x, y \right) \in R^2 \mid y = f\left(x \right) \right\}.$$



Не является графиком функции



\+ Наглядность.

\- Неудобность для применения математического аппарата.

2.2. Основные характеристики поведения функций

Начальный этап исследования функции

1) Нули **f(x)=0** и знак функции на множестве $\mathbf{x \in D(f)}$.

2) Четность $\Leftrightarrow \forall$ $\mathbf{x \in D(f): (-x \in D(f)) \bigcap (f(-x)=f(x))}$;
нечетность $\Leftrightarrow \forall$ $\mathbf{x \in D(f): (-x \in D(f)) \bigcap (f(-x)=-f(x))}$.

Примеры: $f(x) = x^2 - \textit{четная},$

$$f\left(x\right) = x^3 - \textit{нечетная}.$$

Существуют функции общего вида.

3) Периодичность: **f(x)=f(x-T)=f(x+T). T** – период.

f(x) – периодическая $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\exists\, T \neq 0: \forall\, x \in D(f):}$
$\mathbf{(x \pm T) \in D(f) \bigcap f(x \pm T)=f(x)}$.

4) Монотонность: монотонно возрастающая, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right);$$

монотонно убывающая, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right).$$

5) Ограниченность:

ограниченная сверху $\Leftrightarrow$ **$\exists$ M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ f(x)$\leq$M,**

ограниченная снизу $\Leftrightarrow$ **$\exists$ M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ f(x) $\geq$ M,**

ограниченная $\Leftrightarrow$ **$\exists$ N,M$\in$R: $\forall$ x$\in$X$\Rightarrow$ N$\leq$f(x)$\leq$M.**

6) Если условия пункта 5 не выполняются, то функция называется неограниченной.

2.3. Сложная функция. Обратная функция

Сложная функция

На D определена функция $u=\varphi(x) \to E(u)$ – множество значений.

На $E(u)$ задана $y=f(u)$ $\quad (D(f) \subseteq E(u))$.

Тогда $\quad x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y = f\left(\varphi\left(x\right)\right) \Leftrightarrow \left(f \circ \varphi\right).$

Называется суперпозицией функций.

x – независимая переменная; **u** – промежуточный аргумент.

Пример 8. $\quad y=\sqrt{ax^2+bx},\ u=ax^2+bx,\ y=\sqrt{u}.$

Обратная функция

Функция **y=*f*(x)** отображает **D(*f*) → E(*f*).**
Рассмотрим взаимно однозначное отображение

$$f \Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists^1 y \in E : y = f\left(x\right):$$

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right).$$

Тогда можно говорить об обратной функции

$$x = f^{-1}\left(y\right).$$

Пример 9. $y = x^3,\ \ x = \sqrt[3]{y}\ .$

Теорема 2.1. Если числовая функция

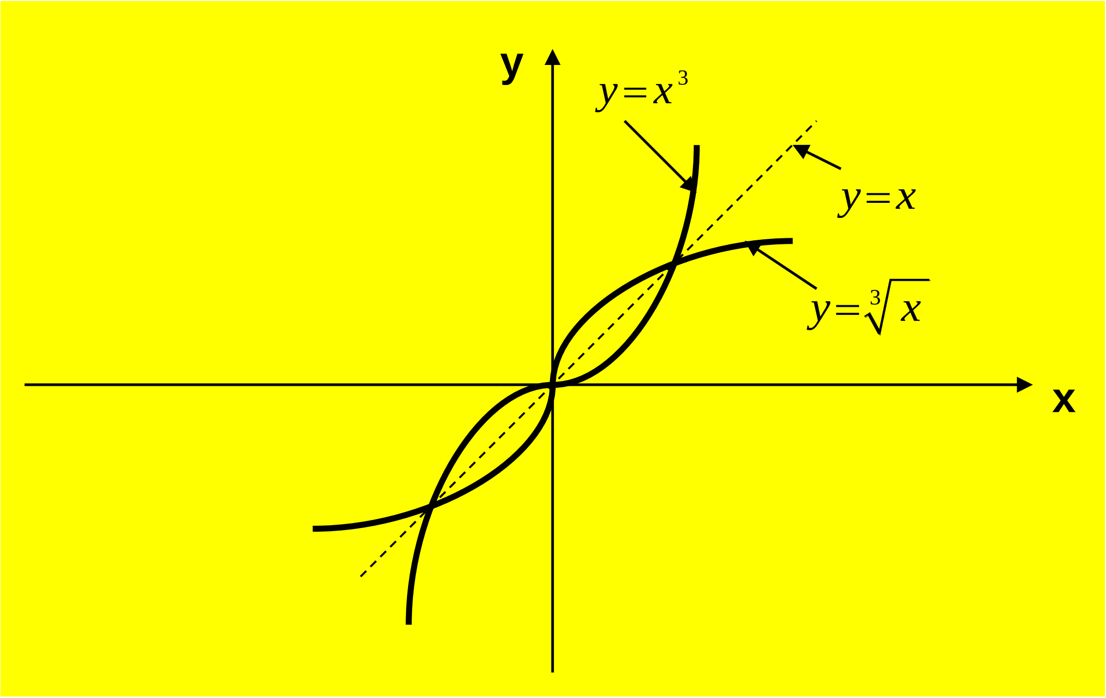
$$y = f(x)$$

монотонна, то $\exists$ обратная функция

$$x = f^{-1}(y).$$

Это достаточное условие обратимости.

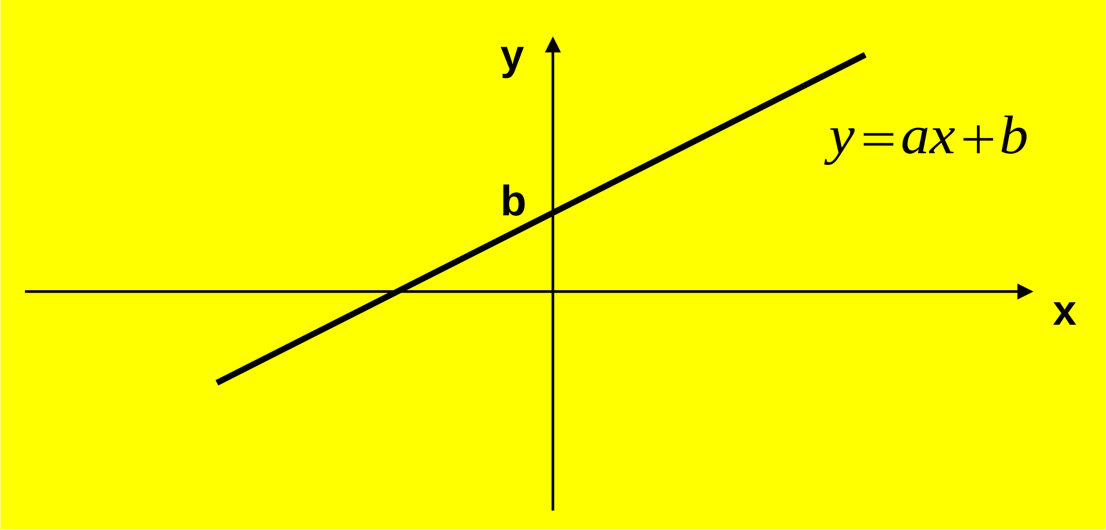
Построение графика обратной функции



2.4. Основные числовые функции и их графики

1) Линейная: $y=ax+b \ \ (a,b \in R)$, $D(f)=R$**.**

$$E(f)=\begin{cases} R & \forall a\neq 0, \\ \{b\} & a=0. \end{cases}$$

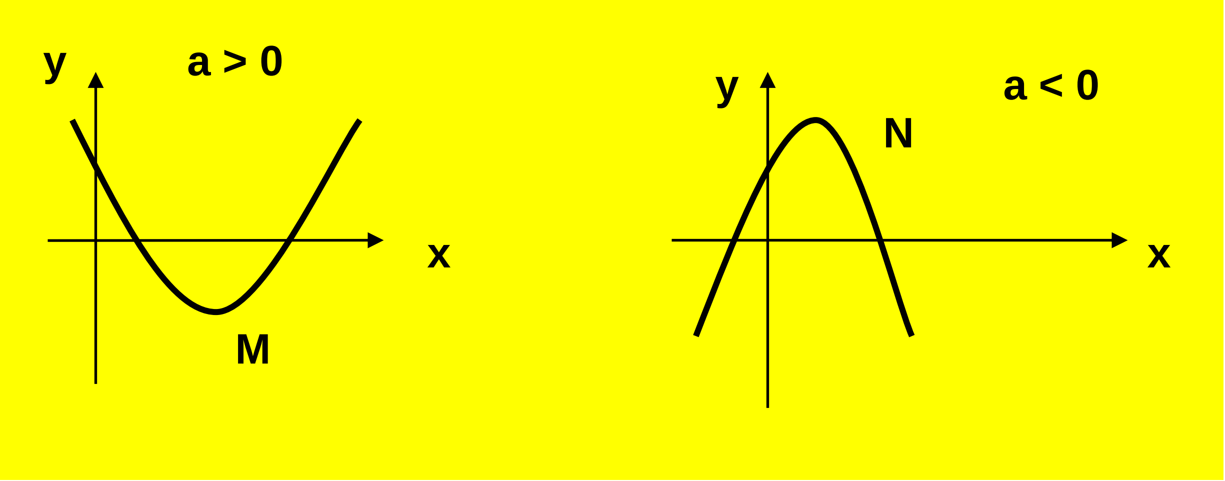


2) Квадратичная функция

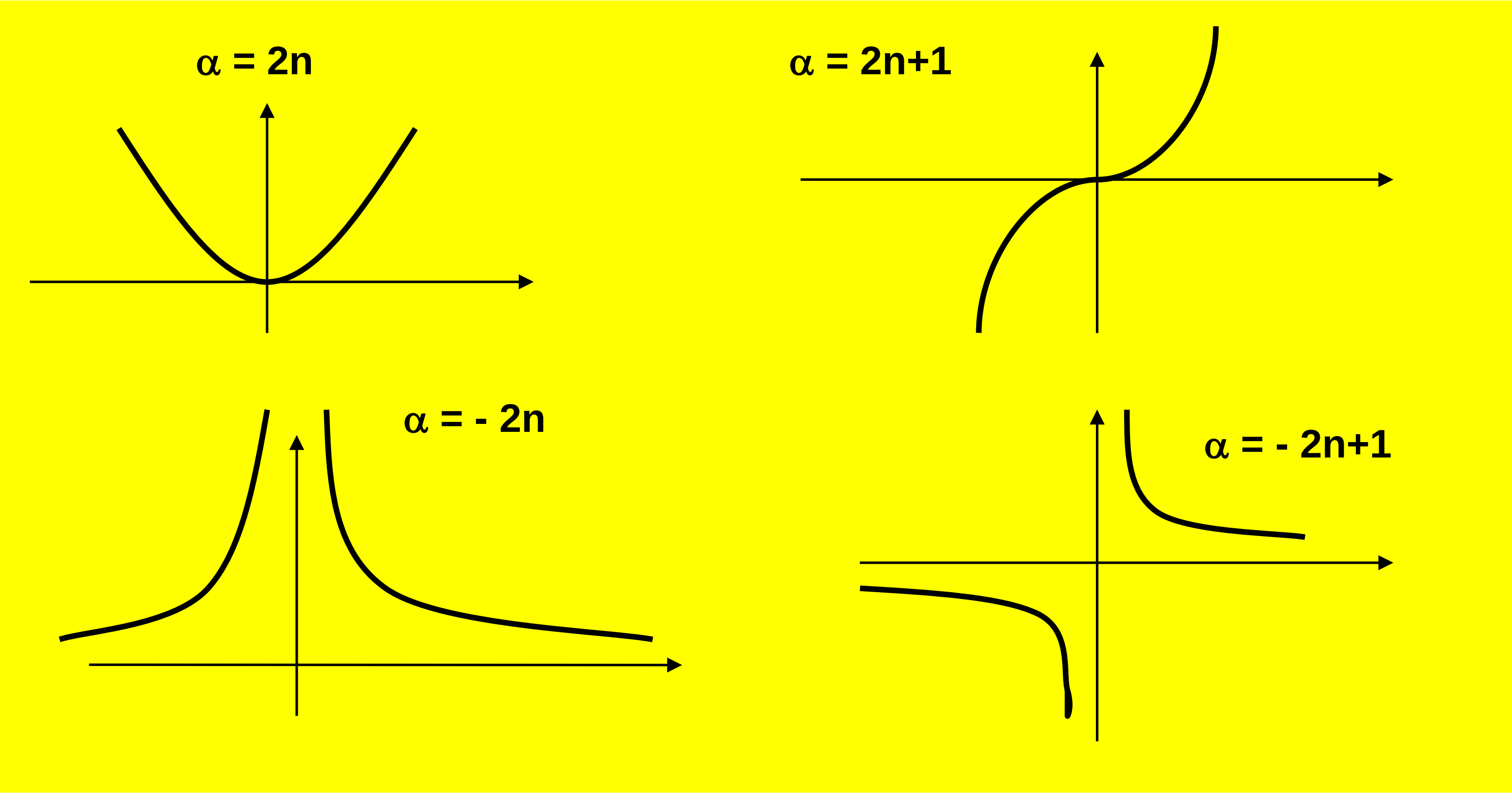
$$y=ax^2+bx+c,\ (a,b,c\in R;\ a\neq 0),\ D(f)=R.$$

$$a>0:\ E(f)=\left(\frac{4ac-b^2}{4a};\infty\right),\ M\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

$$a<0:\ E(f)=\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right),\ N\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$



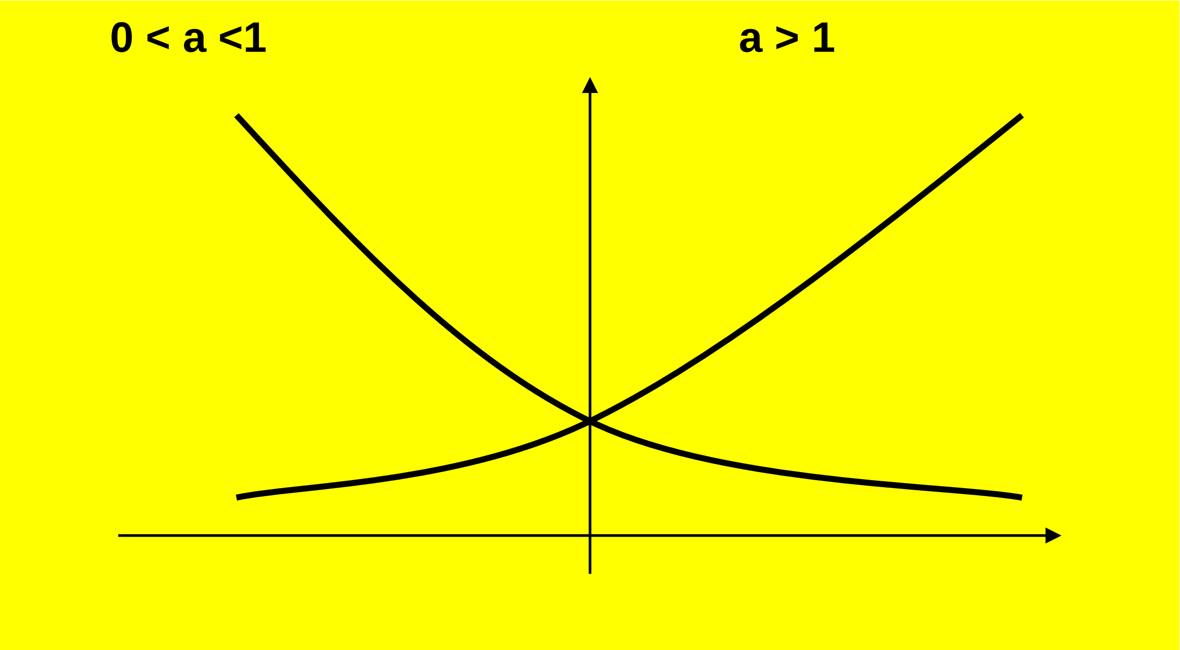
3) Степенная функция $y = x^{\alpha}$.



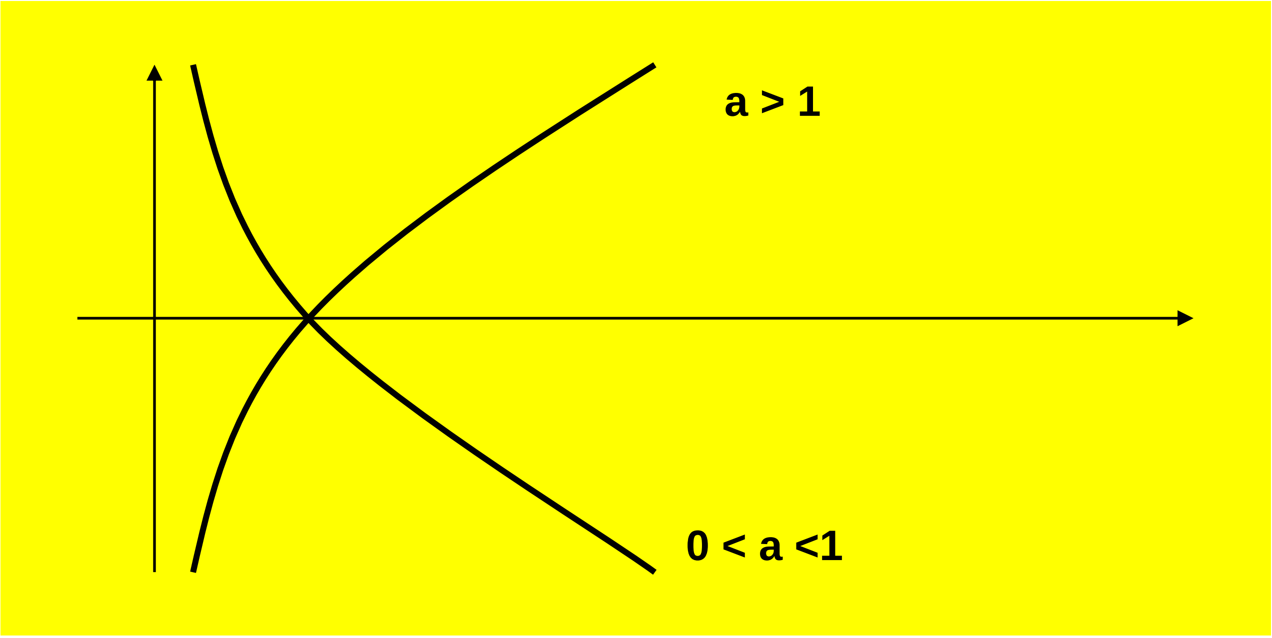
4) Показательная функция

$$y = a^x, \ (a > 0; a \neq 1).$$

$$D(f) = R, \ E(f) = (0; \infty).$$



5) Логарифмическая функция $y = \log_a x.$



6) Тригонометрические функции.

7) Обратные тригонометрические функции.

8) Гиперболические функции.

9) Обратные гиперболические функции.