МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
часть 1

ЛЕКЦИЯ 1
1. МНОЖЕСТВА

1.1. Понятие множества. Логические символы

Логические символы

$\in$- знак принадлежности $\qquad (a \in A)$

$\forall$- квантор всеобщности $\qquad (\forall x \in M)$

$\exists$ - квантор существования $\qquad (\exists x \in M:)$

$\Rightarrow$ - знак логического следования $\qquad (a \Rightarrow b)$

$\Leftrightarrow$ - символ эквивалентности

$$\left(\forall \Delta ABC : AC = BC \Leftrightarrow \angle A = \angle B\right)$$

Множества.
Способы задания

$$A \overset{def}{=} \{a, b, c, d\}; \qquad A = \{x \mid P(x)\};$$

{a} - одноэлементное множество;

$\varnothing$ - пустое множество;

Действительные корни уравнения $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$.

$\exists$ множества конечные и бесконечные.

Если **A** - конечное множество, то число его элементов $|\mathbf{A}|$ - мощность множества.

Отношения между множествами

Определение 1.1. Множества **A** и **B** называются равными, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B** и, наоборот, каждый элемент множества **B** является элементом множества **A**.

Обозначают **A=B**.

Пример 1.

$$A = \left\{ x \;\middle|\; (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = 0 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in N \;\middle|\; x < 4 \right\}.$$

$$A = B$$

Свойства равенства

A=A (рефлексивность);

A=B, B=C $\Rightarrow$ A=C (транзитивность);

A=B $\Rightarrow$ B=A (симметричность).

Неравенство множеств обозначают **A $\neq$ B.**

Определение 1.2. Множество **A** $(\mathbf{A} \neq \varnothing)$ называется подмножеством множества **B** $(\mathbf{B} \neq \varnothing)$, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B**.

Обозначение: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{B}$.

Если $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Пример 2. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

1.2. Операции над множествами

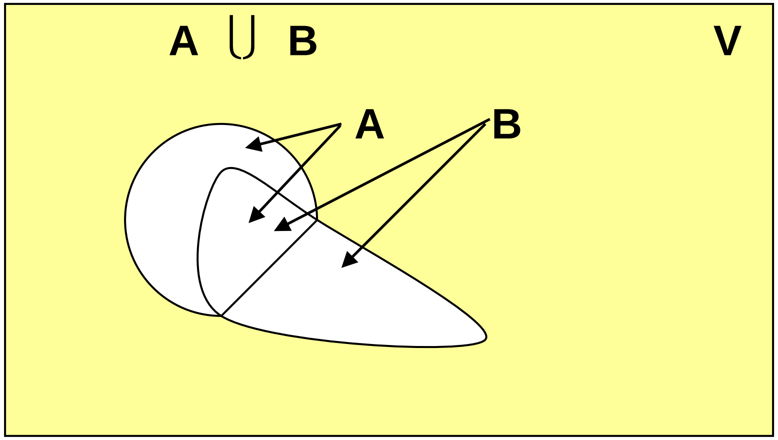
- **V** – основное или универсальное множество.
- 1) В планиметрии **V =** R^2
- 2) Для функций действительной переменной **V = R**.

Определение 1.3. Объединением множеств **A** и **B** называется множество **A** $\bigcup$ **B**, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B** (или обоим одновременно).

$$A \bigcup B \overset{def}{=} \left\{ x \,\middle|\, x \in A \vee x \in B \vee \left(x \in A \wedge x \in B \right) \right\}$$

Пример 3. A = {2,3,4,6}, B = {1,2,3,4,5,6} $\Rightarrow$ **A** $\bigcup$ **B = ={1,2,3,4,5,6}.**

Диаграмма Эйлера-Венна



Свойства объединения множеств

1) $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$ (коммутативность),

2) $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$ (ассоциативность).

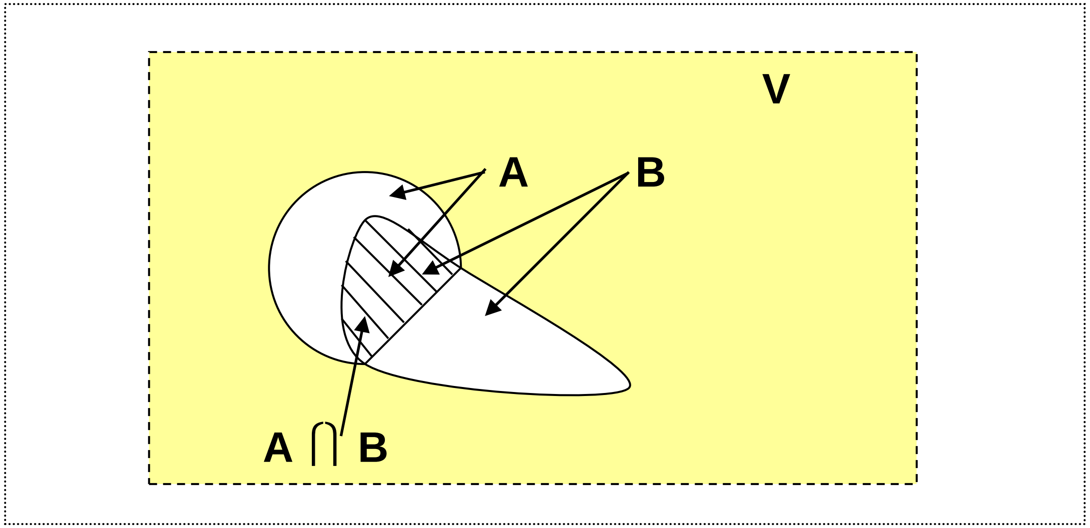
Очевидно

$\mathbf{A \cup A = A}$, $\mathbf{A \cup \varnothing = A}$, $\mathbf{A \cup V = V}$.

Определение 1.4. Пересечением множеств **A** и **B** называется множество **A** $\bigcap$ **B**, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно.

$$\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{x} \in \mathbf{B} \,\}.$$

Диаграмма Эйлера-Венна



Свойства пересечения множеств

1) $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$ (коммутативность),

2) $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$ (ассоциативность).

Очевидно, что $\mathbf{A \cap A = A}$, $\mathbf{A \cap \varnothing = \varnothing}$, $\mathbf{A \cap V = A}$.

Операции объединения и пересечения подчиняются дистрибутивным законам:

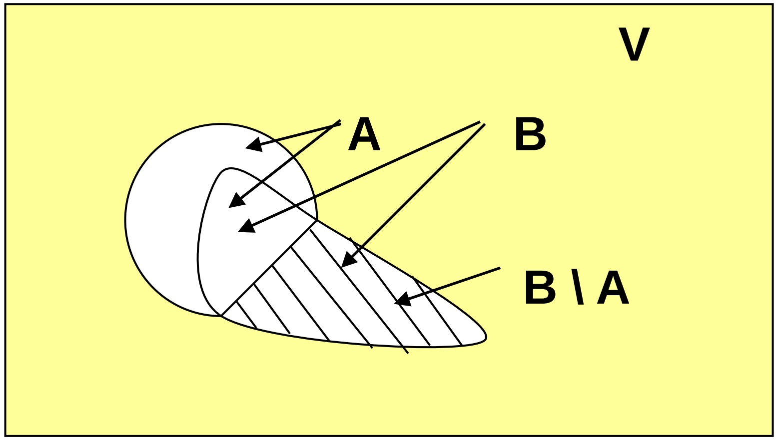
$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$,

$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

Определение 1.5. Разностью двух множеств **B** и **A** называется множество **B \ A**, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **B,** но не принадлежат **A.**

$$\mathbf{B \setminus A = \{\, x \mid x \in B \wedge x \notin A \,\}.}$$

Диаграмма Эйлера-Венна



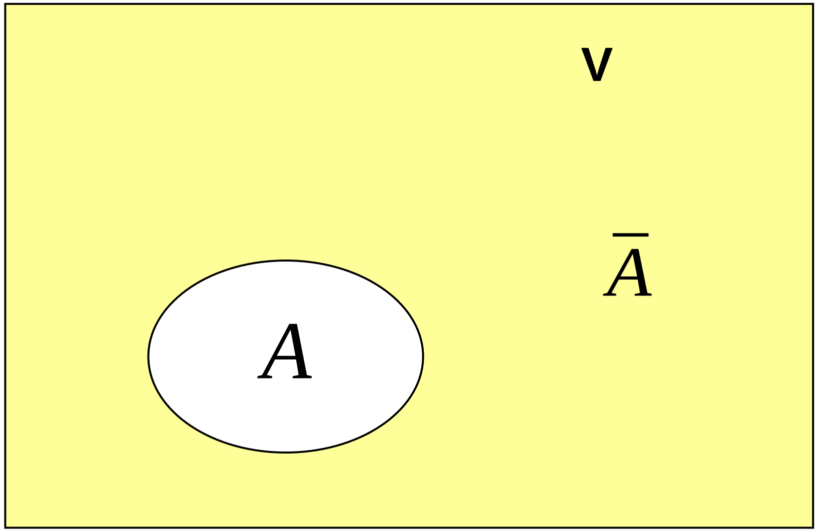
Определение 1.6. Разность **V \ A** называется дополнением множества **A** до универсального множества **V** и обозначается $\overline{A}$.

$$\overline{A} \overset{def}{=} V \setminus A = \left\{ x \middle| x \notin A \right\}.$$

Примеры 4. $A \bigcup \overline{A} = V$; $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$; $\overline{\overline{A}} = A$;

$\overline{\varnothing} = V$; $\overline{V} = \varnothing$.

Диаграмма Эйлера-Венна

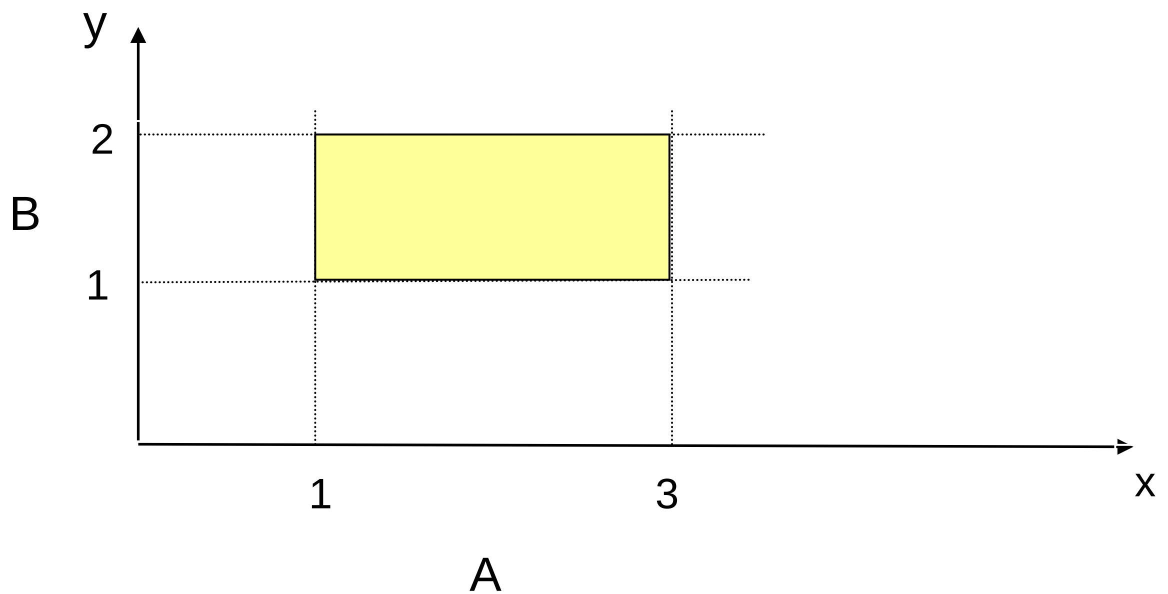


Пара элементов **(x ; y), x $\in$ A, y $\in$ B** называется упорядоченной, если указан порядок записи элементов **x** и **y.**

Считается, что $\left(x_1; y_1\right) = \left(x_2; y_2\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$

Определение 1.7. Декартовым произведением двух множеств **A** и **B** называется множество, обозначаемое $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $\mathbf{(x ; y)}$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{ (\mathbf{x} ; \mathbf{y}) \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B} \}.$$


y
2
B
1
1
3
x
A

1.3. Отображение множеств. Эквивалентность множеств

Пусть **A** и **B** - произвольные множества.

Пусть **f** - закон (правило) по которому $\forall$ **a** $\in$ **A** $\to$ **b** $\in$ **B.**

Говорят, что задано отображение **f** **A** в **B** или оператор **f** **A** в **B.**

Обозначение: **f : A** $\to$ **B** или $A \xrightarrow{f} B.$

b – образ элемента **a** (обозначают **f(a)**);

a – прообраз элемента **b = f(a).**

Определение отображения

$$\mathbf{f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall a \in A \ \exists b \in B : \ b = f(a).}$$

Множество образов всех элементов **a** $\in$ **A** при отображении **f** называют образом множества **A** при этом отображении и обозначают:

$$\mathbf{f(a) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset B.}$$

Задание отображения – это задание тройки **(A, f, B).**

Определение 1.8. Отображение $\mathbf{f: A \to B}$ называют взаимно однозначным или биективным, если каждый элемент $\mathbf{b \in B}$ является образом только одного элемента $\mathbf{a \in A}$.