ЛЕКЦИЯ 31.

Итак, что такое ряд Фурье?

Для $f(x)$ на $[-l; l]$ или для периодических с $T = 2l$ функций на $(-\infty; \infty)$ это ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx.$$

Ряд сходится к $f(x)$ в среднем квадратичном,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Мы привыкли воспринимать такую запись для функциональных рядов как равенство в каждой точке x.

Однако, это не всегда верно (хотя такая запись применяется для рядов Фурье).

16.5.6. Признак поточечной сходимости ряда Фурье.

Определение 1. Будем называть $f(x)$ **кусочно-непрерывной** и **кусочно-монотонной** на $[a, b]$, если $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна.

Признак Дирихле для периодической функции. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$ является **на отрезке длиной в период кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной**, то ее ряд Фурье **сходится в каждой точке**, причем

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{точка непрерывности функции,} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если } x - \text{точка разрыва функции.} \end{cases}$$

Признак Дирихле для функции на отрезке. Если $f(x)$ на $[-l, l]$ **кусочно-непрерывна, кусочно-монотонна и ограничена**, то ее ряд Фурье сходится **в каждой точке**, причем

$$s(x)=\begin{cases} f(x), \quad \text{если } x - \text{точка непрерывности функции}, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \text{ если } x - \text{точка разрыва функции}, \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, \text{ если } x=\pm l. \end{cases}$$

Определение 2. Будем называть **непрерывную** на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x)$ **кусочно-гладкой**, если $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Признак равномерной сходимости ряда Фурье для периодической функции. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$ является **на отрезке длиной в период непрерывной и кусочно-гладкой**, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ **равномерно** на $(-\infty, \infty)$.

Признак равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке. Если $f(x)$ на $[-l, l]$ является **непрерывной, кусочно-гладкой** и $\boldsymbol{f(-l) = f(l)}$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ **равномерно** на отрезке $[-l, l]$.

Замечание. Будем писать

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x+b_n \sin n\frac{\pi}{l}x$$

и для функций, имеющих разрывы, понимая, что в точках разрыва сумма ряда Фурье может быть $\neq \boldsymbol{f(x)}$.

4. Рассмотрим случай, когда **функция задана лишь на части отрезка [–*l*, *l*]**, являющейся интервалом.

Доопределяя функцию разными способами на [–*l*, *l*], получим бесконечно много различных функций, представляемых различными рядами Фурье.

На той части отрезка, на которой функция была задана изначально, суммы этих рядов будут одинаковы и равны заданной функции в точках ее непрерывности.

Например, **функцию, заданную на интервале (0, *l*], можно доопределить на [–*l*, *l*] четным или нечетным образом и получить ее представление на (0, *l*] рядом из косинусов (плюс постоянная составляющая) или рядом из синусов**.

Примеры.

1. Разложить $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.

Функция четная $\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{2}{\pi}x^2\,\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\cdot dx=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\,\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}\qquad (n\in N).$$

$\Rightarrow$ $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}.$$

Ряд сходится к $f(x)$ равномерно.

2. Разложить $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ в ряд Фурье **по синусам** на [0, 1].

Доопределим функцию до нечетной на отрезке [–1, 1]:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1, \\ -x^2, & -1\le x<0. \end{cases}$$

Функция непрерывна на [–1, 1].

$l = 1 \quad \Rightarrow$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

$$b_n=2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x dx=2\left(\frac{2x\sin n\pi x}{n^2\pi^2}-\frac{n^2\pi^2x^2-2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^n+\frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^n+\frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-1\right)\right]\sin n\pi x.$$

Ряд на заданном отрезке [0, 1] сходится в каждой точке, его сумма равна x^2 при $x\in[0, 1)$ и равна нулю при $x = 1$.

Другие формы записи ряда Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x+b_n \sin n\frac{\pi}{l}x$$

1. Сумма гармоник.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\omega_n x+\varphi_n\right)$$

A_n – амплитуда, ω_n – частота, φ_n – начальная фаза,

$T_n=\frac{2l}{n}$ – период n-й гармоники.

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}} \cos\frac{\pi n}{l} t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}} \sin\frac{\pi n}{l} t\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}, \\ \dfrac{a_n}{A_n} = \cos\varphi_n, \\ \dfrac{b_n}{A_n} = -\sin\varphi_n \end{array}\right]$$

$$= A_n\left(\cos\varphi_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l} t - \sin\varphi_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l} t\right) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} t + \varphi_n\right).$$

2. Ряд Фурье в комплексной форме.

Для функций с периодом 2π. Пусть

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Формулы Эйлера:

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\qquad \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=i\,\frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{2},\qquad \alpha\in R.$$

$\Rightarrow\quad \forall n\in N$

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=a_n\,\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n i\,\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}=$$

$$=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}.$$

Обозначим

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\quad (n\in N),\qquad c_0=\frac{a_0}{2}.$$

$\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right);$$

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n\in Z.}$$

Сходимость ряда в точке x означает, что

$$\exists \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\in R.$$

Аналогично для функций с периодом $2l$

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}, \qquad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\frac{\pi}{l}x}dx, \quad n\in Z.}$$

Замечание 1. Формулы

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad \frac{a_n}{2} = \mathrm{Re}\, c_n, \qquad \frac{-b_n}{2} = \mathrm{Im}\, c_n$$

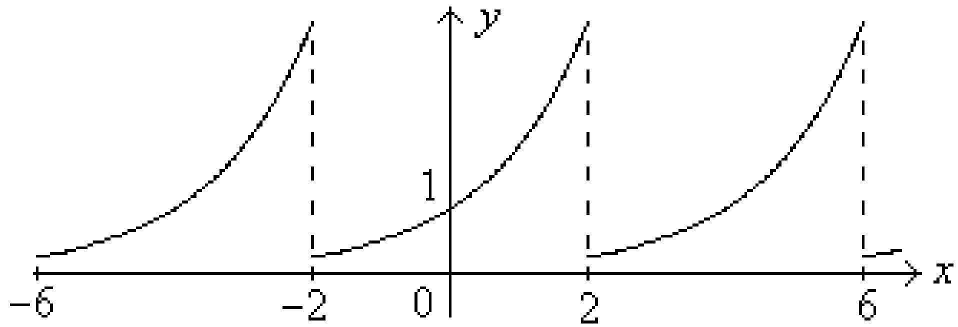
могут использоваться при переводе ряда Фурье из одной формы в другую.

Замечание 2. Число c_n называется **комплексной амплитудой**.

$$|c_{\pm n}| = \left|\frac{a_n \mp ib_n}{2}\right| = \frac{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}{2} = \frac{A_n}{2},$$

A_n – амплитуда гармоники.

Пример. $f(x)$ - периодическая, $f(x) = e^x$ на $(-2, 2]$. Найти представляющий ее ряд Фурье в действительной (тригонометрической) и в комплексной форме. Изобразить сумму ряда.



По рисунку неясно, какое значение заданная функция принимает в точках разрыва. Но для нахождения ряда Фурье особое внимание к этим точкам и не требуется.

Сначала удобнее найти ряд в комплексной форме ($l = 2$).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{2}x},$$

$$c_n=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} e^x\cdot e^{-in\frac{\pi}{2}x}dx=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} e^{(1-in\frac{\pi}{2})x}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-in\frac{\pi}{2}}e^{(1-in\frac{\pi}{2})x}\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-in\pi}(e^{2-in\pi}-e^{-2+in\pi})=\frac{1}{2-in\pi}\cdot\frac{e^2e^{-in\pi}-e^{-2}e^{in\pi}}{2}=\frac{(-1)^n}{2-in\pi}\cdot\operatorname{sh}2=\frac{(-1)^n(2+in\pi)}{4+n^2\pi^2}\cdot\operatorname{sh}2$$

(по формуле Эйлера $e^{\pm in\pi}=\cos n\pi\pm i\sin n\pi=(-1)^n$).

$\Rightarrow$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(2+in\pi)}{4+n^2\pi^2}\cdot\operatorname{sh}2\cdot e^{in\frac{\pi}{2}x}.$$

Переведем в действительную форму.

$$\frac{a_0}{2}=c_0=\frac{\operatorname{sh}2}{2},\qquad a_n=2\operatorname{Re}\frac{(-1)^n(2+in\pi)}{4+n^2\pi^2}\operatorname{sh}2=\frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\operatorname{sh}2\qquad(n\in N),$$

$$b_n=-2\operatorname{Im}\frac{(-1)^n(2+in\pi)}{4+n^2\pi^2}\cdot\operatorname{sh}2=-\frac{2n\pi(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\operatorname{sh}2\qquad(n\in N).$$

$\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\operatorname{sh}2\cdot\cos n\frac{\pi}{2}x-\frac{2n\pi(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\operatorname{sh}2\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x,$$

или

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}2}{2}+2\operatorname{sh}2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\cdot(2\cos n\frac{\pi}{2}x-n\pi\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x).$$

Поточечная сумма ряда: