

16.5. Ряды Фурье.

Итак, что такое ряд Фурье?

Для функций $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ или для периодических с периодом $T = 2\pi$ функций на $(-\infty; \infty)$ это ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ряд сходится к $f(x)$ в среднем квадратичном.

16.5.5. Ряды Фурье для функций на отрезке $[-l, l]$.

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x, \dots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

ряд сходится в среднем квадратичном на отрезке $[-l, l]$.

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx.$$

$a_0/2$ – среднее значение $f(x)$ на $[-l, l]$.

(Множитель π/l перед x привёл к сжатию отрезка $[-\pi; \pi]$ и всех функций в π раз и растяжению в l раз, общим периодом для базисных функций стал $T=2l$)

Пример. $y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-4; 1] \\ 0, & x \in (1; 4] \end{cases}$ на $[-4; 4]$.

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{4} x + b_n \sin \frac{\pi n}{4} x,$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 1 dx = \frac{5}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos n \frac{\pi}{4} x dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 \cos n \frac{\pi}{4} x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{4} + \sin n\pi = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$b_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \sin n \frac{\pi}{4} x dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 \sin n \frac{\pi}{4} x dx = -\frac{1}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{4} x \Big|_{-4}^4 = -\frac{1}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - (-1)^n \right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$y(x) = \frac{5}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{4}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4}$$

16. 5.8. Некоторые частные случаи рядов Фурье.

1. Пусть $f(x)$ – нечетная функция на отрезке $[-l, l]$ (или нечетная периодическая на $(-\infty, \infty)$ с периодом $T = 2l$).

$$\Rightarrow a_0 = 0, \quad \forall n \quad a_n = 0,$$

(интегралы от нечетных функций по отрезку, симметричному относительно точки $x = 0$)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx.$$

2. Пусть $f(x)$ – **четная функция** на отрезке $[-l, l]$ (или четная периодическая на $(-\infty, \infty)$ с периодом $T = 2l$).

$\Rightarrow$

$$\forall n \quad b_n = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx.$$

3. Если $f(x)$ отличается от нечетной функции лишь постоянным слагаемым, т.е.

$$f(x) = f_1(x) + c_0,$$

где $f_1(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \frac{a_0}{2} = c_0.$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx.$$

Замечание. Для периодической функции при вычислении коэффициентов ряда Фурье можно интегрировать по любому отрезку длиной в период:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x) dx, \quad \lambda \in R$$

и т.д.

16.1. Различные виды сходимости последовательностей функций.

16.1.1. Поточечная сходимость последовательности функций.

Определение. $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на интервале J **поточечно (в каждой точке)**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \quad \exists n_{\varepsilon, x} \quad \forall n > n_{\varepsilon, x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

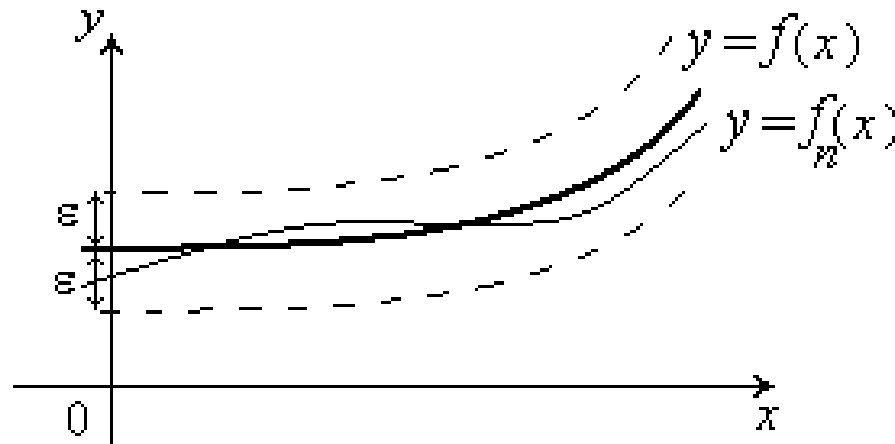
Предельная функция определена однозначно.

16.1.2. Равномерная сходимость последовательности функций.

Определение. $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на интервале J **равномерно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall x \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

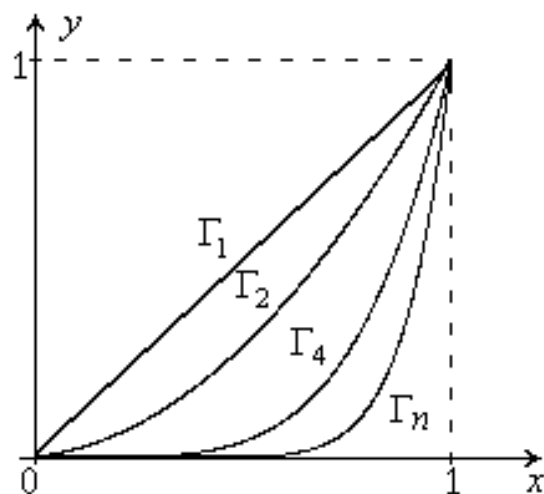
Начиная с некоторого номера, члены последовательности находятся в « ε -полоске» вокруг предельной функции.



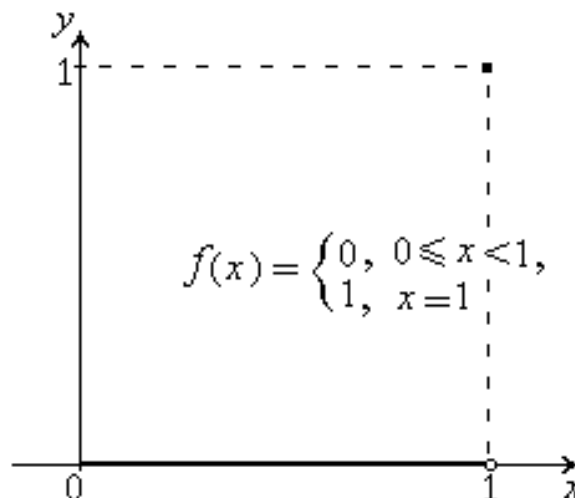
Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость к той же предельной функции. Обратное неверно.

Пример. $f_n(x) = x^n$ сходится поточечно на $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\Gamma_1: y &= x \\ \Gamma_2: y &= x^2 \\ \Gamma_3: y &= x^3 \\ \Gamma_n: y &= x^n\end{aligned}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Предельная функция разрывна, хотя все члены последовательности непрерывны.

$f_n(x) = x^n$ сходится равномерно к $f(x) = 0$ на любом отрезке $[0, b] \subset [0, 1)$,

но не сходится равномерно на интервале $[0, 1)$:

Теорема Вейерштрасса. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

16.1.3. Сходимость в среднем квадратичном.

Определение. $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ **в среднем квадратичном**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < \varepsilon.$$

Геометрический смысл: стремится к нулю площадь между графиками функций $f_n(x)$ и $f(x)$.

Замечание. Из сходимости в среднем квадратичном не следует поточечная сходимость (и, тем более, равномерная).

$f_n(x) = x^n$ сходится на $[0, 1]$ в среднем квадратичном к $f(x) \equiv 0$, тогда как поточечный предел у нее другой.

Мерой погрешности приближения $f(x) \approx f_n(x)$ в среднем квадратичном может служить число

$$\sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx}.$$

Замечание. Предел последовательности функций при сходимости в среднем квадратичном определен не однозначно, т.к. интеграл «не видит» различия между функциями, отличающимися в конечном числе точек.

16.5.6. Признак поточечной сходимости ряда Фурье на отрезке $[-l, l]$.

Определение 1. Будем называть $f(x)$ **кусочно-непрерывной** и **кусочно-монотонной** на $[a, b]$, если $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна.

Признак Дирихле для периодической функции. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$ является на отрезке длиной в период **кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной**, то ее ряд Фурье **сходится в каждой точке**, причем

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{точка непрерывности функции,} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{если } x - \text{точка разрыва функции.} \end{cases}$$

Признак Дирихле для функции на отрезке. Если $f(x)$ на $[-l, l]$ кусочно-непрерывна, кусочно-монотонна и ограничена, то ее ряд Фурье сходится **в каждой точке**, причем

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ — точка непрерывности функции,} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{если } x \text{ — точка разрыва функции,} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & \text{если } x = \pm l. \end{cases}$$

Определение 2. Будем называть **непрерывную** на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x)$ **кусочно-гладкой**, если $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Признак равномерной сходимости ряда Фурье для периодической функции. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$ является на отрезке длиной в период непрерывной и кусочно-гладкой, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ **равномерно** на $(-\infty, \infty)$.

Признак равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке. Если $f(x)$ на $[-l, l]$ является непрерывной, кусочно-гладкой и $f(-l) = f(l)$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ **равномерно** на отрезке $[-l, l]$.

Замечание. Будем писать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x$$

и для функций, имеющих разрывы, понимая, что в точках разрыва сумма ряда Фурье может быть $\neq f(x)$.