ЛЕКЦИЯ 24

15.2. Знакопостоянные числовые ряды. Признаки сходимости.

Определение 1. Числовой ряд, все члены которого неотрицательны, называется **знакоположительным рядом**.

Последовательность (s_n) возрастает:

$$\forall n \quad s_{n+1} \geq s_n.$$

$\Rightarrow$

ряд сходится $\Leftrightarrow$ последовательность (s_n) ограничена.

Иначе

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty,$$

т.е. ряд расходится.

Замечание. Ниже будут сформулированы признаки сходимости знакоположительных рядов. Но с их помощью можно исследовать сходимость любых знакопостоянных рядов: если для всех n $a_n \leq 0$, умножая ряд на "-1", придем к знакоположительному ряду. Эти признаки применимы также для рядов, являющихся знакопостоянными начиная с некоторого номера.

15.2.1. Признаки сравнения.

Часто сходимость или расходимость ряда устанавливается путем сравнения его с другим рядом, сходимость или расходимость которого уже установлена (последний ряд называют **эталонным**).

Теорема 1 (признак сравнения 1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0.$$

Если $\forall\, n \geq n_0$

$$\boldsymbol{a_n \leq b_n},$$

то:

а) из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Замечание 1. Если $\forall n \quad a_n \leq b_n$ и $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то $A \leq B$.

Теорема 2 (признак сравнения 2, признак эквивалентности).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad a_n > 0, \quad b_n > 0.$$

Если $(a_n) \sim (b_n)$, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1\right)$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 2. Признак сравнения 2 иногда формулируется следующим образом.

Если для знакоположительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0, \qquad k \in R,$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Эквивалентность формулировок следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad \Leftrightarrow \quad a_n \sim kb_n,$$

а наличие множителя k не влияет на сходимость ряда.

Замечание 3. При использовании признаков сравнения в качестве **эталонных рядов** часто используются

1) **ряды геометрических прогрессий,**

2) **гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

3) **обобщенный гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который **сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$** (докажем).

15.2.2. Признаки Даламбера и Коши

Заметим, что для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$, представляющего собой геометрическую прогрессию, верно

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{a_n} = q = \mathrm{const}.$$

(ряд сходится при $q < 1$)

Обобщим такой подход на более сложные ряды, когда выражения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\sqrt[n]{a_n}$ - не константы, но имеют предел при $n \to \infty$.

Теорема 1 (признак Даламбера).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

(начиная с некоторого номера)

и

$$\exists \quad \boldsymbol{l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}},$$

то **при $l < 1$ ряд сходится**,

при $l > 1$ ряд расходится,

при $l = 1$ этот признак ответа не дает.

Заметим, что при $\boldsymbol{l > 1}$ последовательность (a_n) возрастает и не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Теорема 2.(радикальный признак Коши).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

(начиная с некоторого номера)

и

$$\exists \qquad \boldsymbol{l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}},$$

то **при $l < 1$ ряд сходится**,

при $l > 1$ ряд расходится,

при $l = 1$ этот признак ответа не дает.

Заметим, что при $l > 1$, начиная с некоторого номера, $\forall\, n$ будет

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

откуда следует, что $a_n > 1$ и не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

15.2.3. Интегральный признак Коши-Маклорена.

Если $f(x)$ неотрицательна и монотонна на $[1, +\infty)$, то ряд

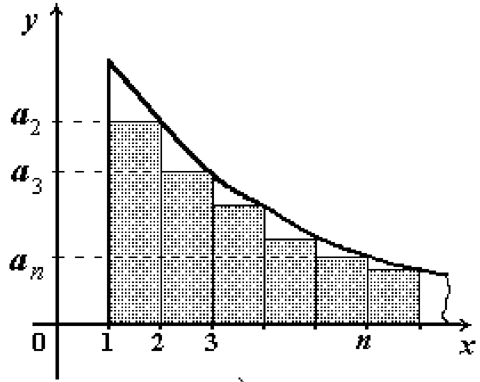
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n = f(n))$$

сходится $\Leftrightarrow$ сходится несобственный интеграл

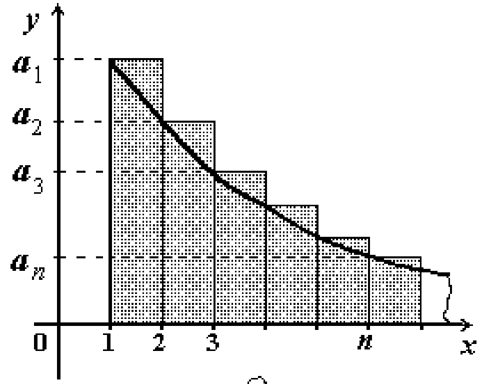
$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx,$$

т.е. $\exists$ конечный $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} f(x)dx.$

Иллюстрация идеи доказательства:



а)



б)

а) Если сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$, то сходится ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=2}^{\infty} f(k)$. Тогда и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится.

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится $\Rightarrow \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Пример. Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Применим **интегральный признак**.

$$a_n = \frac{1}{n} = f(n), \qquad f(x) = \frac{1}{x},$$

$f(x)$ монотонно убывает на $[1, +\infty)$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится $\Rightarrow$ расходится и гармонический ряд (хотя необходимый признак сходимости выполнен).

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in R.$$

При $p \le 0$ не выполняется необходимый признак сходимости, ряд расходится.

При $p>0$, $p \neq 1$ применим **интегральный признак**.

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \begin{cases} \infty, & -p+1>0, \\ -\dfrac{1}{-p+1}, & -p+1<0. \end{cases}$$

Вывод. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится $p \le 1$.