

ЛЕКЦИЯ 21

13.7.6. Метод Лагранжа нахождения решения д.у.

$$L_n[y] = f$$

в случае известного решения д.у.

$$L_n[y] = 0$$

(метод вариации произвольных постоянных).

Теорема. Если

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

то $y_{\text{чн}}$ может быть найдено в виде

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n, \quad (*)$$

где $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

$n = 2$:

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$\Rightarrow$

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

Доказательство ($n = 2$). $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f$, $y_{00} = C_1y_1 + C_2y_2$

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

Подставим $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в уравнение $L_2[y] = f$, т.е.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f,$$

принимая меры для того, чтобы $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ входили в него с производными не выше 1-го порядка:

$$\begin{aligned} y' &= C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = \\ &= C_1y_1' + C_2y_2' \end{aligned}$$

(если положить $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$),

$$y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

$\Rightarrow$

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) = f(x).$$

Но $L_2[y_1] = 0$, $L_2[y_2] = 0 \Rightarrow C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$.

$\Rightarrow$ система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными C_1', C_2' :

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Основной определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

– вронскиан $W_2(x) \neq 0$, т.к. y_1, y_2 линейно независимы.

Система имеет единственное решение $C_1'(x), C_2'(x)$.

При любом n :

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0; \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0; \\ \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0; \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array} \right.$$

Система имеет единственное решение $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$.

Интегрируем и подставляем в (*). Ищем **частное решение** $\Rightarrow$ первообразные берем по одной.

Замечание. Если брать все первообразные, то при подстановке в (*) получим не частное, а **общее решение** уравнения $L_n[y] = f$.

Пример. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1), \quad (x \neq 1).$$

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \quad y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_2,$$

y_1, y_2 — линейно независимые решения, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Легко проверить: $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = e^x$ — линейно независимые решения.

$$y_{00} = C_1 x + C_2 e^x.$$

Метод вариации: $y = C_1(x)x + C_2(x)e^x,$

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'e^x = 0; \\ C_1' + C_2'e^x = x - 1. \end{cases}$$

$$C_1' = -1, \quad C_2' = xe^{-x}; \quad C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

$$y_{\text{чн}} = (-x)x + (-xe^{-x} - e^{-x})e^x = -(x^2 + x + 1),$$

$$y_{\text{он}} = y_{00} + y_{\text{чн}} = C_1x + C_2e^x - (x^2 + x + 1).$$

Замечание. Если $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_2$,

то

$$y = (-x + C_1)x + (-xe^{-x} - e^{-x} + C_2)e^x = C_1x + C_2e^x - (x^2 + x + 1) = y_{\text{он}}$$

13.7.8. Метод неопределенных коэффициентов нахождения решения д. у.
 $L_n[y] = f(x)$ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f, \quad p_i \in R \ (i = 1, \dots, n).$$

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$$

$y_{\text{оо}}$ находить научились,

$y_{\text{чн}}$ тоже — методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

В некоторых случаях вид одного из $y_{\text{чн}}$ заранее ясен.

Вместо метода Лагранжа можно применить **метод неопределенных коэффициентов.**

Примеры.

1. $y'' + 6y' + 9y = x^2 - 1.$

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}},$$
$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

$$y_{\text{чн}} = Ax^2 + Bx + C.$$

(многочлен той же степени, что и в правой части уравнения).

Подставим в уравнение:

$$2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 1.$$

Разные степени x линейно независимы

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 9A = 1, \\ x & 12A + 9B = 0, \\ x^0 & 2A + 6B + 9C = -1, \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{9}, \quad B = -\frac{4}{27}, \quad C = -\frac{1}{27}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{9} x^2 - \frac{4}{27} x - \frac{1}{27}.$

2. $y''' - 8y' = 2x + 1.$

$$y_{\text{оН}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чН}},$$

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 e^{2\sqrt{2}x} + C_3 e^{-2\sqrt{2}x}.$$

$$y_{\text{чН}} = x(Ax + B).$$

(мы повысили степень многочлена по сравнению с $f(x)$, иначе при подстановке равенства не добиться)

Подставим в уравнение:

$$0 - 8(2Ax + B) = 2x + 1.$$

$$\begin{array}{l|l} x & -16A = 2, \\ x^0 & -8B = 1 \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2 e^{2\sqrt{2}x} + C_3 e^{-2\sqrt{2}x} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}.$