

ЛЕКЦИЯ 18

13.5. Д. у. высших порядков. Теорема о существовании и единственности решения. Задача Коши.

13.5.1. Теорема о существовании и единственности решения д. у.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Теорема. Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные

$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в области $\Omega \subseteq R^{n+1}$, то $\forall$ точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$

$\exists$ единственное решение $y(x)$ уравнения на некотором интервале оси Ox , содержащем x_0 , такое, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

13.5.2. Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка.

Это задача нахождения решения д.у. (1), удовлетворяющего начальным условиям (2).

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные (независимые) постоянные.

В условиях теоремы о $\exists$ и единств. решения $\forall$ точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$ задача Коши (1, 2) имеет единственное решение. В этом случае говорят, что задача Коши поставлена корректно, в противном случае – некорректно.

Пример. $y'' = \sin \sqrt{y' - 1} \cdot x + y^2$.

Начальные условия задачи Коши имеют вид: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$.

$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ – задача поставлена некорректно, т.к. точка $(x, y, y') = (0, 1, 0)$ не принадлежит области определения правой части уравнения;

$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ – задача поставлена некорректно, т.к. производная $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{x \cdot \cos \sqrt{y' - 1}}{2\sqrt{y' - 1}}$ не определена в точке $(1, 1, 1)$.

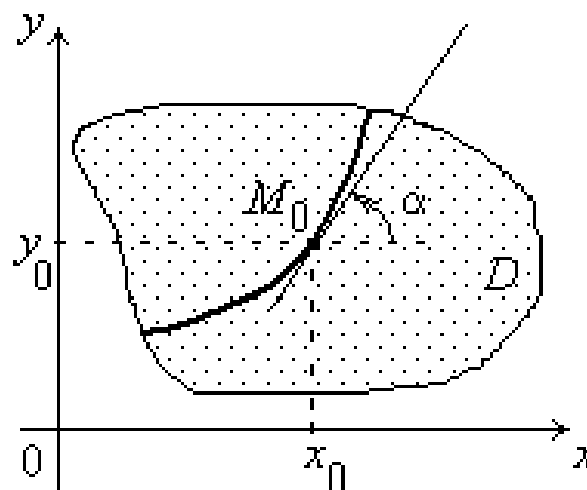
$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$ – задача поставлена корректно.

13.5.3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения II порядка.

Задача Коши:

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (y_0 \in \mathbb{R}, \quad y'_0 \in \mathbb{R}).$$



Если выполнены условия теоремы, то через каждую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ (проекция Ω на плоскость (x, y)) проходит единственная интегральная кривая с заданным наклоном $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$ касательной в точке M_0 .

13.6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

13.6.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Метод решения.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2$$

и т. д.

Пример. Решить задачу Коши:

$$y''' = e^x, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=1, \quad y''(1)=2.$$

Решение. Интегрируем трижды:

$$y'' = \int e^x dx + C_1 = e^x + C_1; \quad y' = \int (e^x + C_1) dx = e^x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int (e^x + C_1 x + C_2) dx = e^x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = e^x + \tilde{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Найдем решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y(1)=0 \Rightarrow e + \tilde{C}_1 + C_2 + C_3 = 0;$$

$$y'(1)=1 \Rightarrow e + 2\tilde{C}_1 + C_2 = 1;$$

$$y''(1)=2 \Rightarrow e + 2\tilde{C}_1 = 2$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1 = 1 - \frac{e}{2}, \quad C_2 = -1, \quad C_3 = -\frac{e}{2} \Rightarrow$$

$$y = e^x + \left(1 - \frac{e}{2}\right) x^2 - x - \frac{e}{2}.$$

13.6.2. Уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n.$$

(не содержат искомую функцию и (возможно) несколько ее младших производных).

Метод понижения порядка. Замена неизвестной функции

$$y^{(k)} = p(x)$$

приводит к уравнению $(n - k)$ -го порядка

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Если удастся получить общее решение

$$p = p(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

то затем решается уравнение

$$y^{(k)} = p(x, C_1, \dots, C_{n-k})$$

k -кратным интегрированием.

Пример. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x) \Rightarrow \quad xp' = p + x \sin \frac{p}{x}, \quad p' = \frac{1}{x} p + \sin \frac{p}{x}.$$

Это однородное уравнение.

$$p(x) = xu(x), \quad p' = u + xu' \Rightarrow \quad u + xu' = u + \sin u, \quad xu' = \sin u, \quad \frac{xdu}{dx} = \sin u.$$

При $u \neq \pi k$ (const, $k \in \mathbb{Z}$),

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln |C_1| = \ln |xC_1|,$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = xC_1, \quad C_1 \neq 0; \quad u = 2 \operatorname{arctg}(C_1 x), \quad p = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x); \quad y' = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow$$

$$y = 2 \int x \operatorname{arctg}(C_1 x) dx = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2} \right) \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + C_2.$$

При $u = \pi k$ (const, $k \in \mathbb{Z}$) – проверкой легко установить, что это – решения –имеем:

$$y = \int x \pi k dx = \pi k \frac{x^2}{2} + C, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2} \right) \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + C_2, \quad y = \pi k \frac{x^2}{2} + C, \quad k \in \mathbb{Z}.$

13.6.3. Уравнения вида

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

(не содержат явно независимую переменную x)

Метод понижения порядка.

Замена независимой переменной и неизвестной функции:

$$y' = p(y)$$

$$y'' = (y')' = (p(y))'_x = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right) \frac{dy}{dx} = \left(p''_{yy} \cdot p + (p'_y)^2 \right) p = p''_{yy} \cdot p^2 + (p'_y)^2 p.$$

И т. д. $\Rightarrow$ Уравнение примет вид

$$\tilde{F}(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0, \quad p' = \frac{dp}{dy}.$$

Если удастся получить общее решение $p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, то затем решается уравнение

$$y' = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} = dx.$$

Замечание. Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решения вида $y = \text{const}$.

Пример. 1. $y \cdot y'' = (y')^3$.

$$y' = p(y), \quad y'' = p'p \Rightarrow$$

$$y \cdot p'p = p^3 \Rightarrow (y \cdot p' = p^2) \vee (p = 0).$$

а) $p = 0 \Rightarrow y = \text{const}$ – решения.

б)

$$y \cdot p' = p^2 \Rightarrow y \cdot \frac{dp}{dy} = p^2, \quad \frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{y}, \quad -\frac{1}{p} = \ln |y| + C_1, \quad p = -\frac{1}{\ln |y| + C_1}$$

Возвращаемся к $y(x)$:

$$y' = -\frac{1}{\ln |y| + C_1}, \quad (\ln |y| + C_1)dy = -dx, \quad y \ln |y| - y + C_1 y = x + C_2$$

Ответ. $y \ln |y| - y + C_1 y = x + C_2, \quad y = C.$