Лекция 11
13.5.4. Преобразование Фурье
13.5.4.1. Преобразование Фурье и формула обращения

В симметричной виде формула Фурье в комплексной форме может быть записана следующим образом

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt\right).$$

Обозначим

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt. \qquad (*)$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (**)$$

Функция $F(\alpha)$ называется образом Фурье (спектральной характеристикой, спектром), заданной на $(-\infty, +\infty)$ функции $f(x)$, называемой ***прообразом*** (или ***оригиналом***).

Формула перехода от функции-оригинала $f(x)$ к функции-образу $F(\alpha)$ называется ***преобразованием Фурье***.

Применительно к преобразованию Фурье теорема о достаточных условиях представления функции $f(x)$ с помощью интеграла Фурье может быть сформулирована следующим образом

Теорема. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси Ox и удовлетворяет достаточным условиям Дирихле на каждом конечном отрезке $[-l,l]$. Тогда:

а) образ Фурье $F(\alpha)$, определяемый формулой (*) (преобразование Фурье)

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt$$

существует (интеграл в правой части равенства сходится);

б) справедлива формула обращения (**) (обратное преобразование Фурье).

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha .$$

Для четной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\cos\alpha x dx\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right).$$

Для нечетной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sin\alpha x dx\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right).$$

Обозначим

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt.$$

Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha.$$

Аналогично

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt.$$

Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha.$$

Функция

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt$$

называется ***косинус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

Функция

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt$$

называется ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

13.5.4.2. Свойства преобразования Фурье

Введем обозначения для интегралов в правой части формул (*) и (**)

$$F(\alpha) = \Phi\left[f(x)\right]$$

для преобразования Фурье и

$$f(x) = \Phi^{-1}\left[F(\alpha)\right]$$

для обратного преобразования Фурье.

Заметим, что фраза **«функция *f* (*x*) есть оригинал»** означает, что для $f(x)$
а) существует преобразование Фурье (это означает, что несобственный интеграл в формуле (*) сходится);
б) существует и обратное преобразование, т.е. справедлива формула (**).

Свойства преобразования Фурье

1. Пусть $f(x)$ - оригинал и C = const.
   Тогда $Cf(x)$ – также оригинал и $\Phi[Cf(x)] = C\Phi[f(x)]$.
2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ - оригиналы.
   Тогда их сумма $f(x) \pm g(x)$ также оригинал и выполняется равенство

$$\Phi\left[f(x) \pm g(x)\right] = \Phi\left[f(x)\right] \pm \Phi\left[g(x)\right].$$

Замечание. Из свойств 1 и 2 следует, что

$$\Phi\left[\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i \Phi\left[f_i(x)\right].$$

3. Пусть $f(x)$ - функция-оригинал дифференцируема n раз и пусть производные $f^{(m)}(x)$ $(m = 1,..,n)$ - оригиналы. Тогда

$$\Phi\left[f^{(m)}(x)\right] = (i\alpha)^m \Phi\left[f(x)\right] \qquad (m = 1,..,n).$$

13.5.4.3. Применение преобразования Фурье. Вычисление несобственных интегралов первого рода

Пример 44. Вычислить несобственный интеграл первого рода или доказать его расходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha a \cos\alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < a; \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x = a; \\ 0, & \text{если} \quad x > a. \end{cases}$$

Найдем для нее косинус-преобразование Фурье F_c(a)

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a} \cos\alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\alpha a}{\alpha}.$$

С помощью формулы обращения найдем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}1, & \text{если} \quad 0\le x<a;\\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x=a;\\ 0, & \text{если} \quad x>a.\end{cases}$$

Ответ.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 0\le x<a;\\ \frac{\pi}{4}, & x=a;\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

Пример 44. Найти несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-ax}$ $a>0$, $x\geq 0$.
Интегрируя по частям, найдем

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos\alpha t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\alpha^2};$$

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin\alpha t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

Применяя формулы обратного преобразования Фурье, придем к следующим равенствам

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=e^{-ax},\qquad x>0;$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=e^{-ax},\qquad x>0.$$

Ответ.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\quad x>0;\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-ax},\quad x>0.$$

Замечание. Подобным способом создаются таблицы для вычисления некоторых несобственных интегралов первого рода.