Лекция 10
13.5.3. Интеграл Фурье
13.5.3.1. Связь ряда Фурье и интеграла Фурье

Из вышеизложенного известно, всякую (периодическую или непериодическую) функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке [-l; l] условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x,$$

где: $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos \omega_n t dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin \omega_n t dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox в том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать, что на любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и что сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < \infty.$$

При этом функция $f(x)$ называется ***абсолютно интегрируемой*** на всей числовой оси.

Подставляя в ряд Фурье значения коэффициентов a_n и b_n, получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t)(\cos\omega_n t \cdot \cos\omega_n x + \sin\omega_n t \cdot \sin\omega_n x)\,dt,$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\omega_n (t - x)\,dt.$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt$$

в правой части равенства при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt.$$

Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ принимает значения

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \omega_3 = \frac{3\pi}{l}, \ldots,$$

образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l} \quad \left(\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n\right),$$

при этом $\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$.

Итак

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\cdot\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\right)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

где

$$\varphi(\omega_n) = \int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt, \quad \omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$$

Можно показать, что полученная сумма является интегральной суммой для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\omega(t-x)\,dt, \quad \omega \in (0; +\infty).$$

Переходя в этой сумме к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\omega)\,d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \qquad (*)$$

13.5.3.2. Интеграл Фурье

Определение. Эта формула (*) называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части формулы

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$$

называется ***интегралом Фурье*** для функции $f(x)$.

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$. В точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Приведенные выше рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы

Теорема. Пусть функция $f(x)$

1. Является ***абсолютно интегрируемой*** на всей числовой оси.

2. На любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле.

Тогда на интервале $(-\infty, \infty)$

- в точках непрерывности функция $f(x)$ справедливо ее представление интегралом Фурье;
- в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формулу Фурье можно переписать в другом виде (в виде однократного интеграла)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\big(\cos\omega t\cdot\cos\omega x+\sin\omega t\cdot\sin\omega x\big)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}d\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt\cdot\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt\cdot\sin\omega x\right).$$

То есть

$$\boxed{f(x) = \int\limits_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega,}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt. \end{aligned}}$$

Таким образом, можно провести аналогию между ***рядом Фурье*** и ***интегралом Фурье***:
в обоих случаях функция $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих.

Однако,
ряд Фурье суммируется по индексу n, принимающему ***дискретные*** значения $n = 1,2,3,\ldots$,
в интеграле Фурье производится интегрирование по ***непрерывной*** переменной ω.

Замечания

1. Если функция $f(x)$ — ***четная***, то формула Фурье принимает вид

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \, d\omega, \quad \text{где} \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt;$$

в случае ***нечетной*** функции

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x \, d\omega, \quad \text{где} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt.$$

2. Если функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $(0; +\infty)$, то ее можно продолжить на промежуток $(-\infty;0)$ разными способами, в частности — четным или нечетным образом:

В первом случае она будет представлена формулой

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \, d\omega \ ,$$

во втором — формулой

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x \, d\omega \ ,$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ вычисляются, как указано в замечании 1.

3. Формулу Фурье можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega), \qquad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega).$$

Тогда, в случае четной функции,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widetilde{A}(\omega) \cos \omega x \, d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widetilde{B}(\omega) \sin \omega x \, d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{B}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Пример 43. Представить интегралом Фурье функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-x}, & x\in\left(0;+\infty\right), \\ 0, & x=0, \\ -e^{x}, & x\in\left(0;-\infty\right). \end{cases}$$

Решение. Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке (- ∞; + ∞):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2.$$

Функция $f(x)$ нечетная, применим формулу

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega, \quad \text{где} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Вычислим функцию $B(\omega)$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Ответ.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2}\cdot\sin\omega x\, d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Замечание. Отметим, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1+\omega^2} \, d\omega.$$

С другой стороны

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Таким образом

$$\int_0^\infty \frac{y \sin y}{1+y^2} \, dy = f(1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

То есть, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов.

13.5.3.3. Интеграл Фурье в комплексной форме

Интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$$

в комплексной форме может быть представлен в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega x} dt.$$