Лекция 9

13.5.2. Комплексная форма ряда Фурье

13.5.2.1. Комплексные числа

В поле действительных чисел неразрешимо простейшее уравнение $x^2+1=0$, или $x^2=-1$.

Введем новое число $i=\sqrt{-1}$.

Тогда уравнение $x^2=-1$ будет иметь два корня: i и $-i$, ибо

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1, \qquad (-i)^2 = \left(-\sqrt{-1}\right)^2 = -1 .$$

Замечание. Более того, с появлением ***мнимой единицы*** (так было названо число i) ***любое квадратное уравнение*** $ax^2+bx+c=0$ ***получает два корня*****!**

В самом деле, если $D = b^2 - 4ac < 0$, то $-D>0$, и значит,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(-D)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Например, для уравнения $x^2-2x+2=0$ имеем $D=-4$, откуда $-D=4$, и

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Символ вида $x+iy$,
где x и y - действительные числа,
$i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица,
называется ***комплексным числом*** z с ***действительной частью*** x и ***мнимой частью*** y.

Выражение $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой записи*** комплексного числа.

Действительное число x можно трактовать как комплексное число $x+i0$ (т.е. с отсутствующей мнимой частью), так что множество действительных чисел является подмножеством ***множества комплексных чисел*** C.

Комплексные числа вида $0+iy=iy$ называются чисто ***мнимыми***.

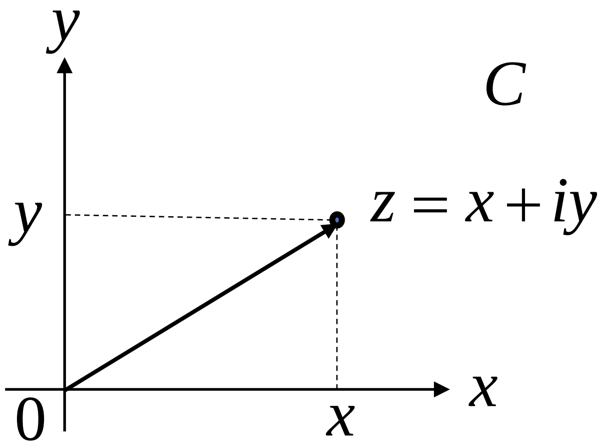
В XVIII веке мнимые числа (так их назвал Декарт) широко использовались в математической практике, но не имели никакого содержательного истолкования. Им не было места на числовой прямой, а выйти за пределы этого одномерного пространства не догадались ни Лейбниц, ни Бернулли, ни Даламбер, ни Эйлер (именно он обозначил мнимую единицу буквой i).

Первым это сделал датский землемер Каспар Вессель в 1799 году - он предложил отождествить комплексные числа с точками плоскости.

Идея геометрического представления комплексных чисел заключается в том, что комплексному числу $z=x+iy$ сопоставляется точка плоскости с координатами (x,y) .

Таким образом, между точками числовой плоскости и комплексными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy.$

Так мнимые числа получили вполне осязаемую интерпретацию в виде точек комплексной плоскости *C*.



Можно было ожидать, что при анализе уравнений более высоких степеней возникнет необходимость в дальнейшем обобщении понятия числа.

Но в 1799 году Гаусс доказал, так называемую, ***Основную теорему алгебры***.

Теорема. Всякое алгебраическое уравнение степени n с действительными или комплексными коэффициентами

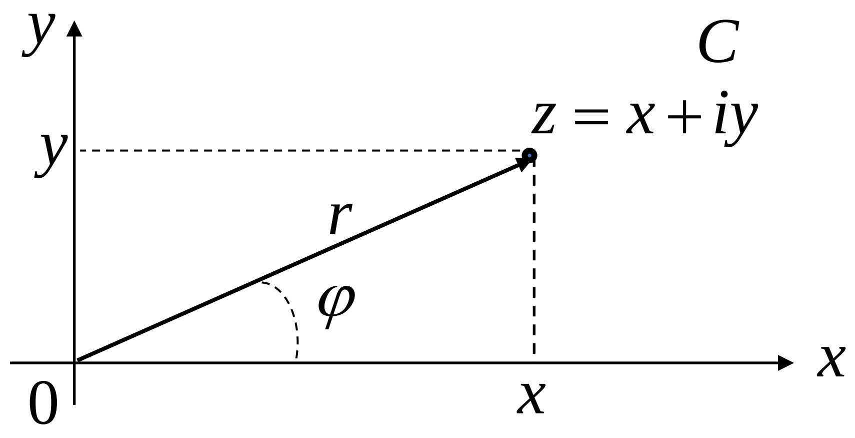
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

разрешимо в поле комплексных чисел и имеет n корней (с учетом их кратностей).

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Вместо того, чтобы определить вектор его проекциями x и y на координатные оси, мы можем определить его двумя другими величинами, а именно: его длиной r и углом φ, который направление вектора образует с положительным направлением оси Ox. Если же мы считаем, что комплексное число $x + iy$ соответствует точке с координатами (x,y), то r и φ будут, очевидно, полярными координатами этой точки.

Как известно, имеют место соотношения $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$



$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \varphi=\arg z+2k\pi=|k\in Z|=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x>0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi\operatorname{sign}y, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}y, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Положительное число r называется ***модулем***, φ - ***аргументом*** комплексного числа $z = x + iy$, $\arg z$ – ***главное значение аргумента***. Аргумент $\varphi=\operatorname{Arg} z$ определяется лишь с точностью до слагаемого $2k\pi$.

В случае $r = 0$, комплексное число равно нулю, и его аргумент совершенно не определен.

Условие равенства двух комплексных чисел состоит, очевидно, в том, что ***модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемыми, кратными*** 2π.

Комплексное число через его модуль и аргумент записывается в виде: $z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$.

В таком случае говорят, что комплексное число задано в ***тригонометрической форме***.

Формулы Эйлера

Обобщим понятие о показательной функции на случай любого (в том числе и комплексного) показателя. При вещественном показателе функция e^x может быть представлена в виде ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Определим, аналогично, для чисто мнимого показателя:

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \ldots$$

Отсюда, отделяя вещественные и мнимые члены, имеем

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right)$$

и, вспомнив разложения $\cos y$ и $\sin y$ в ряд, определяем

$e^{yi} = \cos y + i\sin y$, $e^{-yi} = \cos y - i\sin y$.

Отсюда и получаются ***формулы Эйлера***, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

Эти формулы позволяют записать ***показательную форму*** комплексного числа, имеющего модуль r и аргумент φ:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{i(\arg z + 2k\pi)} = |z|e^{i\arg z}$$

($2\pi i$ – период функции e^z).

Показательную функцию при любом комплексном показателе $z = x + yi$ определяем формулой

$$e^{z} = e^{x+yi} = e^{x}e^{yi} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Т.е. модуль числа $e^{z} = \mathrm{e}^{x+yi}$ будем считать равным e^{x}, а аргумент равным y.

13.5.2.2. Комплексная форма ряда Фурье 2π - периодических функций

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи.

Преобразуем ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

и его коэффициенты

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=0,1,2,\dots ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,\dots$$

к комплексной форме. Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Подставив эти выражения в обычный тригонометрический ряд, находим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

где обозначено

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Найдем выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n} . Используя выражения для c_n и c_{-n} и формулы для коэффициентов a_n , b_n , получим

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \;,$$

где $\quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Вычисление c_0 производится по формуле

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Формулу для разложения функции в ряд Фурье можно переписать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (3.1)$$

Коэффициенты такого ряда можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Равенство (3.1) называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n - ***комплексными коэффициентами ряда Фурье*.**

Заметим, для полноты картины,

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

На случай комплексной формы переносятся все свойства, полученные для обычных рядов.

Прежде всего это:

Теорема Дирихле. Если 2π - периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна,

то соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке.

Отметим, что при разложении четных и нечетных 2π – периодических функций удобно использовать ***действительную*** форму ряда Фурье.

Если функция $f(x)$ - четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $f(x)$ - нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

13.5.2.3. Случай произвольного периода функции

Если $2l$ – периодическая функция $f(x)$ задается на промежутке $(-l; l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \tag{3.3}$$

а коэффициенты вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Заметим, что формулы (3.1), (3.2) получаются из (3.3), (3.4), если положить $l=\pi$.

13.5.2.4. Некоторые дополнительные сведения о рядах Фурье

Система функций e^{-inx} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ является полной ортонормированной системой в пространстве функций удовлетворяющих условиям Дирихле на интервале (-π,π].

Это вытекает из равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} - символ Кронекера

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m \end{cases}$$

и теоремы Дирихле.

Свойства коэффициентов ряда Фурье

Для произвольной непрерывной, периодической с периодом 2π функции имеет место неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Если функция разложима в ряд Фурье, то имеет место равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

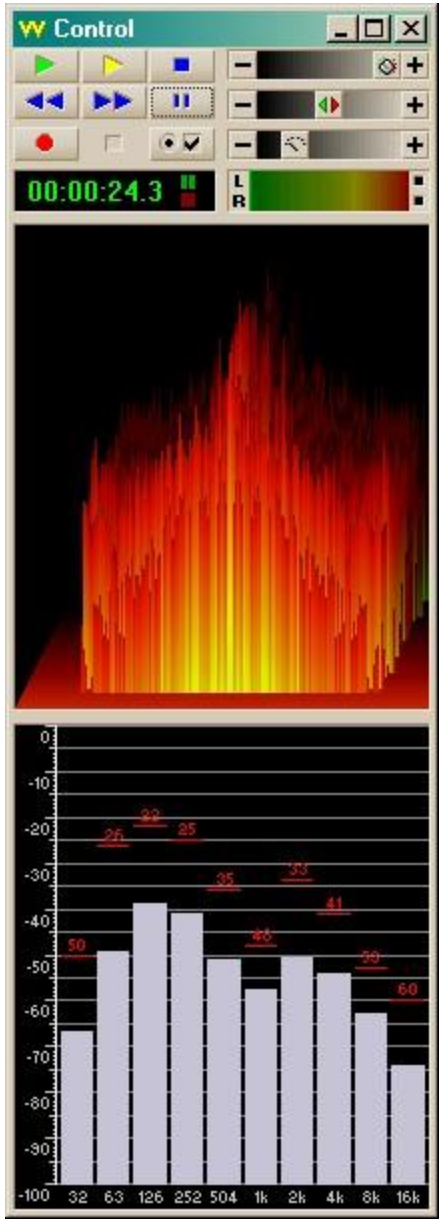
В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}}$ называются ***гармониками*** коэффициенты c_n - комплексными ***амплитудами*** гармоник, а числа

$$\varpi_n = \frac{\pi n}{l}$$

волновыми числами функции $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}.$$

Совокупность величин $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ называется ***амплитудным (частотным) спектром***.

Графически спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $\varpi_n = \frac{\pi n}{l}$ числовой оси.


Control
00:00:24.3
L
R
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
50
26
22
25
35
46
33
41
50
60
32
63
126
252
504
1k
2k
4k
8k
16k

Метод Крылова улучшения сходимости

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4-1} \sin nx \,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

$$\frac{n^3}{n^4-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5-n}$$

Но известно, что при $x \in (-\pi, \pi)$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \,,$$

откуда

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5-n} \sin nx \,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Приложения рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и периодической правой частью $q(x)$ периода 2π

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = q(x)$$

Существует ли периодическое решение уравнения с периодом 2π?
Будем искать решение в форме ряда Фурье в комплексной форме

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{ikx} .$$

Представим функцию правой части в виде ряда Фурье

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{ikx}$$

тогда при всех *к* $p_0 \cdot (ik)^n y_k + p_1 \cdot (ik)^{n-1} y_k + \cdots + p_n \cdot y_k = q_k$

(равенство коэффициентов Фурье левой и правой частей уравнения).

Полагая $P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$,

получаем соотношение (Фурье-образ уравнения)

$$P(ik) \cdot y_k = q_k \ .$$

Если $P(ik) \neq 0$, то $y_k = \dfrac{q_k}{P(ik)}$.