Лекция 8

13.5.1.5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных 2π-периодических функций

Если 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале (-π,π) является ***четной*** или ***нечетной***, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится ***неполным***).

Теорема. Если 2π-периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая на интервале (-π,π) условиям Дирихле, на интервале (-π,π) четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если на интервале (-π,π) она нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, то:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная функция.} \end{cases}$$

Если функция $f(x)$ — четная,
то $f(x)\cos nx$ - четная функция, т.к. $f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$,
а $f(x)\sin nx$ - нечетная функция, т.к. $f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$.

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x)\cos nx$ - нечетная, а $f(x)\sin nx$ - четная.

Ч.Т.Д.

Определение. Ряды

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами ***по косинусам*** и ***по синусам*** соответственно.

13.5.1.6. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом *T*=2*l*

Пусть задана периодическая функция $f(x)$, имеющая период $2l$ (где l - некоторое положительное число) и удовлетворяющая на интервале $(-l, l)$ условиям Дирихле.

Сделав подстановку $x=ly/\pi$, $(-\pi<y\leq\pi)$, получим периодическую функцию $g(y)=f(ly/\pi)$, имеющую период 2π и удовлетворяющую на интервале $(-\pi,\pi)$ условиям Дирихле.

Ряд Фурье для этой функции имеет вид

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right)=g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера - Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny dy, \;\; n = 0,1,2,...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny dy, \quad n = 1,2,... .$$

Т.к. $y = \pi x / l$, то получим для функции $f(x)$ тригонометрический ряд несколько измененного вида :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}).$$

Этот ряд называется рядом Фурье для функции $f(x)$ с периодом T=2l.

Формулы Эйлера-Фурье при этом имеют вид

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Замечание.
Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π - периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$.

В частности, если $f(x)$, удовлетворяющая на интервале $(-l,l)$ условиям Дирихле, на интервале $(-l,l)$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

если та же функция $f(x)$ на интервале $(-l,l)$ нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

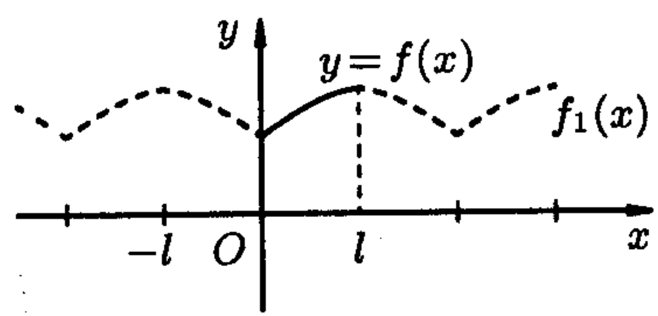
где $$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

13.5.1.7. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть непериодическую функцию $f(x)$ заданную на отрезке $[0,l]$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0,l]$.

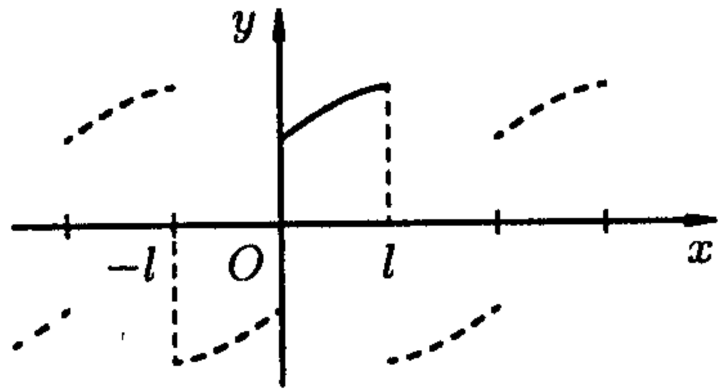
Такую функцию можно произвольным образом доопределить на интервале $(-l,0)$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на интервале $(-l,0)$ четным образом



В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы.

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $(-l,0)$ нечетным образом



то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов.

13.5.1.8. Примеры разложения функции в ряд Фурье

Пример 39. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, на отрезке $[-\pi,\pi]$ и построить график.

Решение. Очевидно, что функция $y = x$ на интервале $(-\pi,\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Продолжим ее периодически на всю числовую ось. $T = 2\pi$. Эта функция на интервале $(-\pi,\pi)$ нечетная. Следовательно, $a_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots$,

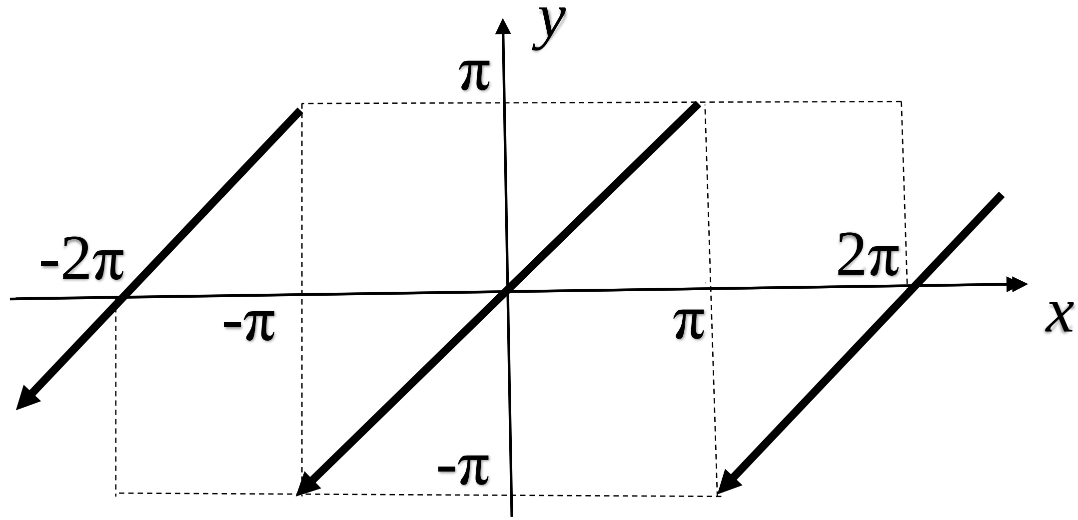
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos \pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

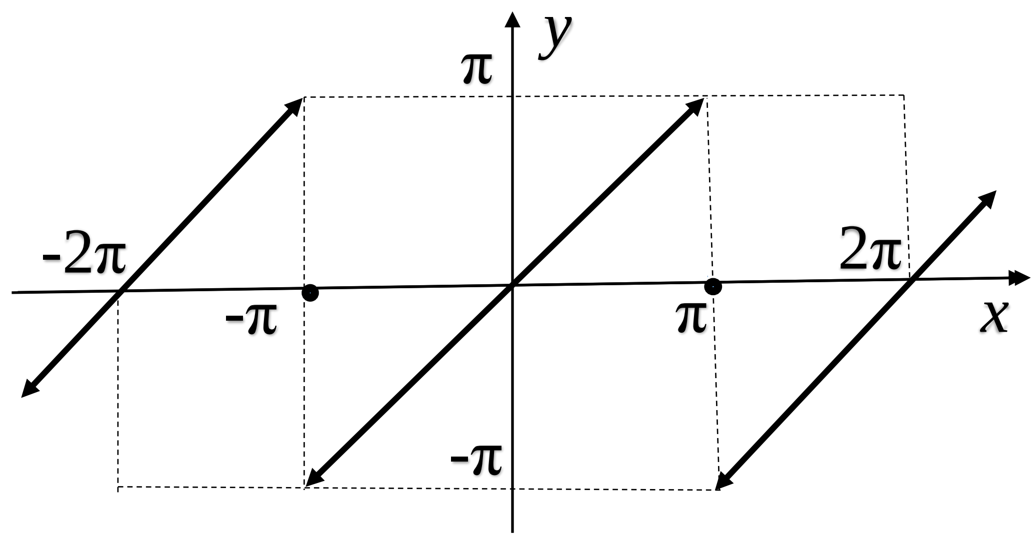
$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

При этом $$S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

Ответ. График заданной функции $y = f(x)$



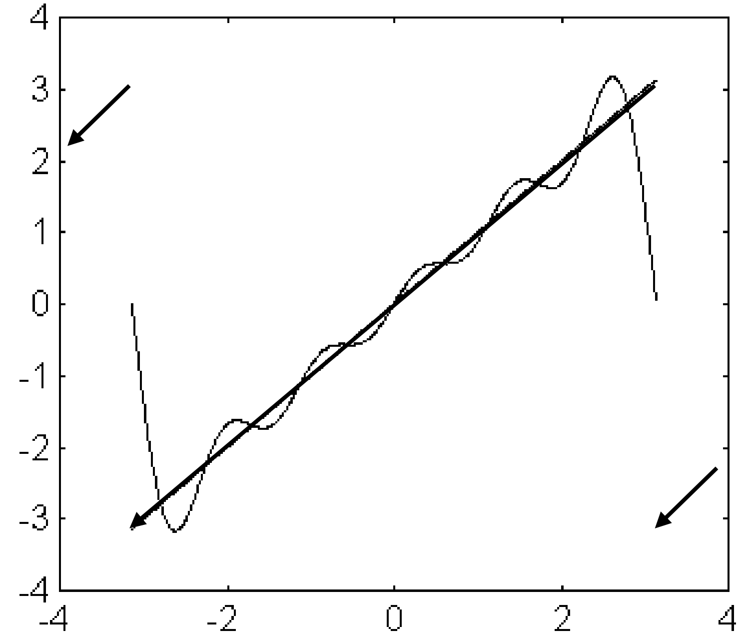
и соответствующего ряда $y = S(x)$



Ряд Фурье для функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет вид

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \ldots\right]$$

Если ограничиться конечным числом членов ряда ($n = 5$), то график его будет следующим на отрезке $[-\pi,\pi]$:



В точках $x = \pm\pi$ (на концах отрезка) ряд Фурье сходится к нулю и не совпадает со значениями функции

$$f(x)\Big|_{x=\pm\pi} = \pi.$$

Пример 40. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке [-4;4] в ряд Фурье.

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле на интервале (-4;4). Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Эта функция на интервале (-4;4) нечетная. $T=2l=8$.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4}, \qquad b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычислим коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

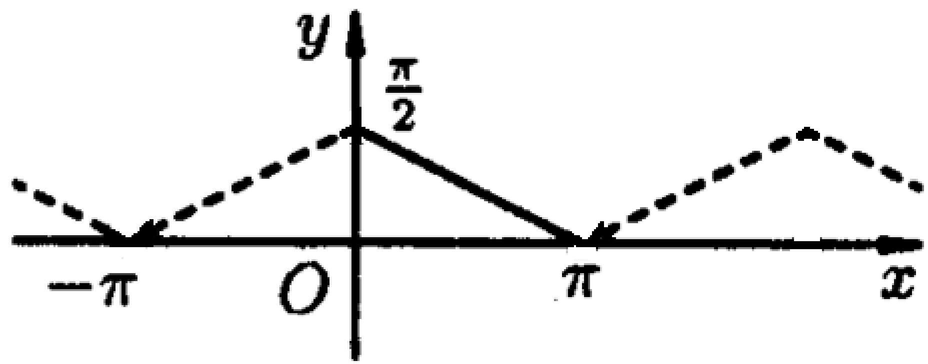
$$= -\frac{8}{\pi n}\cos\pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right) \quad \text{для } -4 < x < 4$$

Пример 41. Разложить в ряд косинусов функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}, \quad \text{на отрезке } 0\le x\le\pi.$$

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок (-π,0) четным образом.



Разложим в ряд функцию

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0\le x\le\pi,\\[2ex] \dfrac{\pi+x}{2}, & \text{если } -\pi<x<0.\end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ на интервале $-\pi < x < \pi$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле

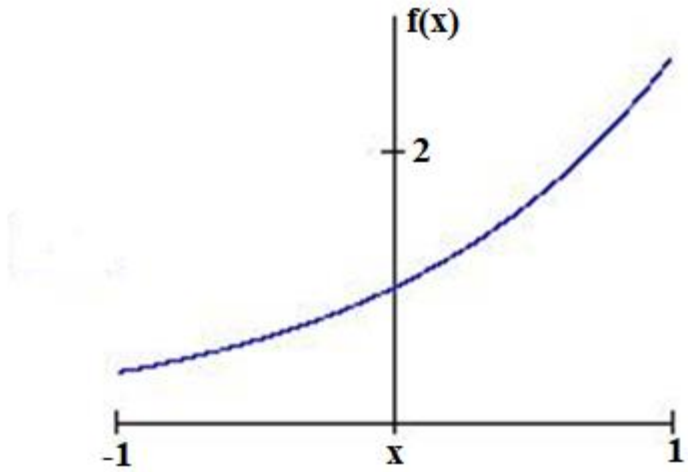
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n).$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

$$0 \le x \le \pi.$$

При этом $$S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Пример 42. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \exp(x)$ на отрезке [-1;1] построить ее график в среде Mathcad.



Решение. Функция $f(x) = \exp(x)$ непрерывна и не имеет экстремумов на отрезке [1;1]. Рассмотрим функцию на интервале (-1;1). На этом интервале функция удовлетворяет условиям Дирихле. Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Тогда ее период равен T=2.

Найдем аналитически коэффициенты Фурье

$$\frac{1}{L}\cdot\left(\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx\right) \rightarrow \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)} + \exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

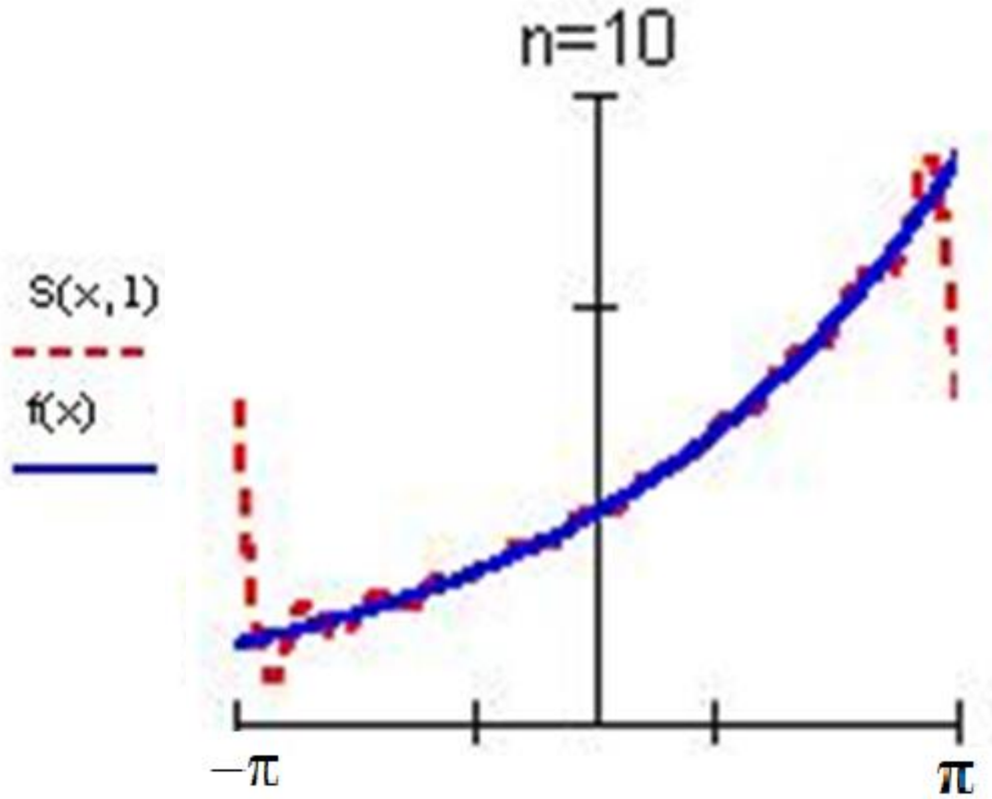
$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx \rightarrow \frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$a(k) := \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)} + \exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$b(k) := \frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

Ответ. Определим частичные суммы и построим графики функции для разных значений *n*:

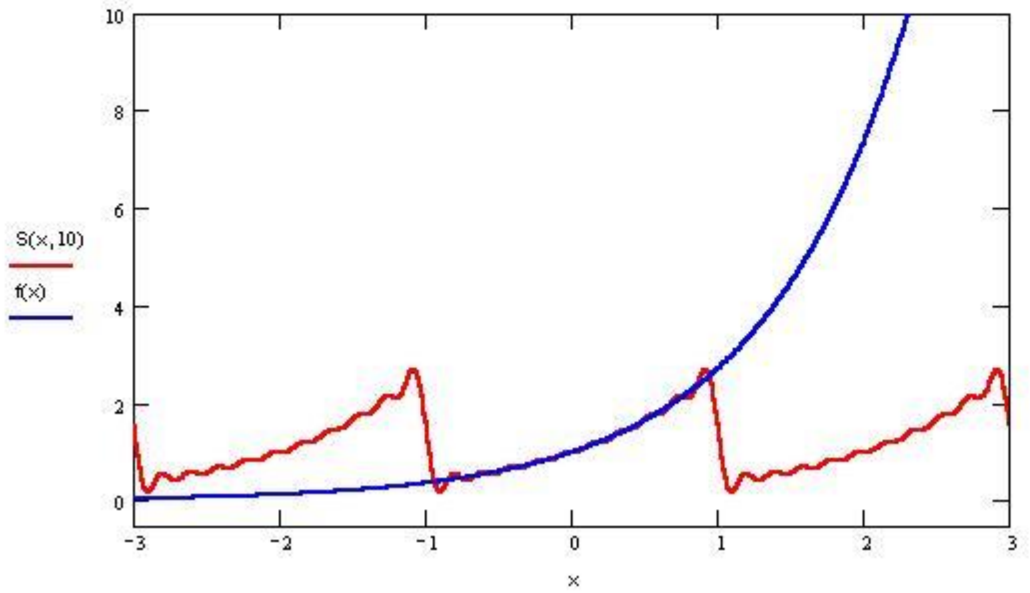
$$S(x,n) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a(k)\cdot\cos(k\cdot\pi\cdot x) + b(k)\cdot\sin(k\cdot\pi\cdot x)\right)$$

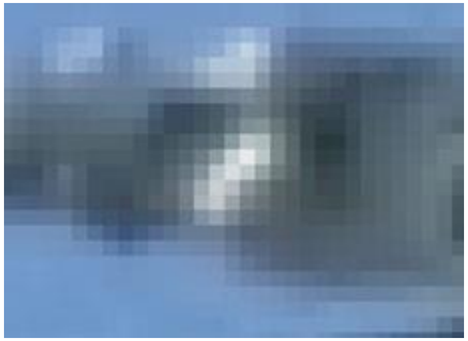


Замечания.

1.Ряд Фурье сходится к данной функции только на заданном отрезке.

2.Сумма ряда является периодической функцией и вне отрезка может совсем не совпадать с данной функцией



JPEG использует для сохранения ряды Фурье и при больших степенях сжатия просто отбрасывает члены ряда высшего порядка. И каждый раз при воспроизведении изображения на экране компьютер производит синтез. Причём достаточно ресурсоемкий и заметный на медленных компьютерах. Из этого следует одно замечание: если Вы сохранили какой-нибудь рисунок в формате JPEG, то восстановить его обратно до последнего пикселя невозможно! Именно из-за этого формат называется "форматом с потерями", и именно поэтому не рекомендуется пере сжимать JPEG-изображения, т.к. они обязательно станут хуже.

Пример. Разложение сигнала в ряд Фурье**.**

Анимация показывает сумму первых 20 гармоник ряда Фурье прямоугольного импульса .
Мы видим на этой анимации, что функция в основном формируется первыми несколькими гармониками.
Высшие гармоники лишь увеличивают крутизну фронтов прямоугольника