Лекция 7
13.5. Ряды и преобразование Фурье. Интеграл Фурье
13.5.1. Ряды Фурье
13.5.1.1. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик

Определение. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$, называются ***ортогональными*** на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, называется ***ортогональной системой функций*** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j.$$

Определение. Система функций называется ***ортогональной и нормированной*** (***ортонормированной***), если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Определение. ***Рядом Фурье по ортогональной системе функций*** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Пусть функция $f(x)$ – непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[a,b]$.

Определение. ***Разложением функции*** $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[a,b]$ по ортогональной системе функций называется ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \text{где} \qquad a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx}.$$

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты имеют вид

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx.$$

13.5.1.2. Периодическая функция. Свойства периодических функций

Определение. ***Периодическая функция*** - функция, значение которой не изменяется при добавлении к аргументу определённого, неравного нулю числа, называемого периодом функции.

Например:

1. sin x и cos x: являются периодическими функциями с периодом 2π;
2. $\{x\}$ - дробная часть числа x периодической функции с периодом 1;
3. e^x (если x - комплексное переменное) – периодическая функция с периодом $2\pi i$ и т.п.

Свойства периодических функций

1. Если периодическая функция имеет действительный период, непрерывна и отлична от постоянной, то для неё существует наименьший положительный период T,
всякий другой действительный период той же функции будет иметь вид kT,
где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$.

2. Сумма, произведение и частное периодических функций с одним и тем же периодом являются периодической функцией с тем же периодом.

3. Производная периодической функции - есть периодическая функция с тем же периодом.

4. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период T/a. Действительно,

$$f\left(a\cdot\left(x+T/a\right)\right)=f\left(ax+T\right)=f\left(ax\right).$$

5. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $\left[x_0,x_1\right]\in R$, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

при любых a и b, принадлежащих $\left[x_0,x_1\right]$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$.

Простейшим периодическим процессом является простое ***гармоническое колебание***, описываемое функцией

$$y = A\sin(\iota\omega\, t + \varphi), \qquad t \geq 0,$$

где A - ***амплитуда колебания***,

$\iota\omega$ - ***частота***,

φ - ***начальная фаза***.

Функцию такого вида (и ее график) называют ***простой гармоникой***.

Основным периодом функции y является $T = 2\pi/\iota\omega$, ($\iota\omega$ показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени).

Проведем преобразование функции y:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 =$$
$$= a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую ***сложное периодическое колебание*** (периодический процесс).

Всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник?

Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих ***гармоник***?

13.5.1.3. Тригонометрические ряды

Рассмотрим систему тригонометрических функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots,$$

Теорема. Любые две различные функции, взятые из системы функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots,$$

ортогональны в промежутке $[-\pi,\pi]$.

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m,n = 1,2,\ldots, \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad n = 1,2,\ldots, \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,\ldots \quad n = 1,2,\ldots,.$$

Т.к.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x \right] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x \right] dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + \cos 2mx \right] dx = \pi, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Определение. *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots$$

или, короче,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Действительные числа a_n, b_n называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если тригонометрический ряд равномерно сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ – периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π,π] и его сумма равна $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (*)$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [-π,π], и ряд сходится равномерно, то можно почленно проинтегрировать члены предыдущего равенства по отрезку [-π,π]

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=\pi a_0,$$

ибо $$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=0.$$

Поэтому $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

После умножения обеих частей (*) на cosmx (в другом случае - на sinmx) и последующего интегрирования по отрезку [-π,π] в правой части останутся члены, для которых $m=n$ и в итоге имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx + b_n\cos nx\sin nx)dx = \pi a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1, 2, \dots;$$

аналогично (после умножения на sinmx)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Определение. Если функция $f(x)$ – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке $[-\pi,\pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,\dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\dots$$

существуют и называются ***коэффициентами Фурье*** для функции $f(x)$.

Формулы для нахождения a_n, b_n называются ***формулами Эйлера-Фурье.***

Определение. ***Рядом Фурье*** для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

13.5.1.4. Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций. Теорема Дирихле

При каких условиях ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$?

Будем рассматривать периодические функции $f(x)$ имеющие период $T = 2\pi$. Такие функции называют **2π - *периодическими***.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\pi)$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится для всех x на интервале $(-\infty,\infty)$ и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (***условия Дирихле***), то на интервале (-∞,∞) имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (*)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Замечания.

1. Равенство (*) может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi,\pi]$.

2. В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

3. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на интервале $(0,2\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (*), где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегралы $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойств периодической функции.

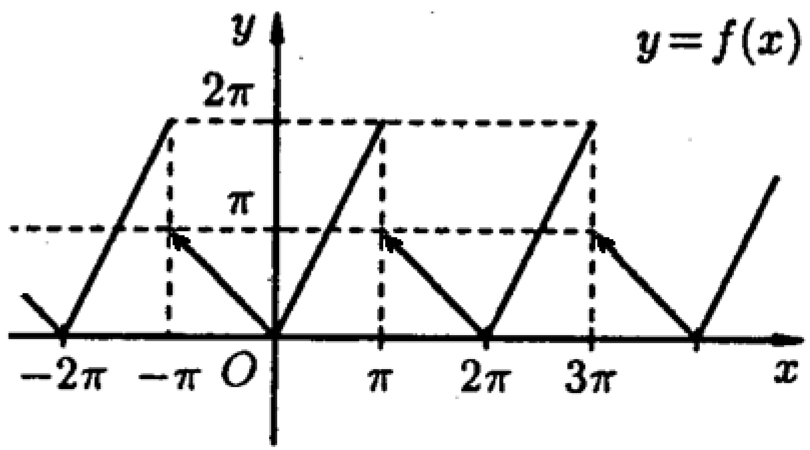
4. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях.

Однако, существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. ***теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое***.

Пример 38. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $(-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi;\\ -x, & \text{при} \quad -\pi<x\le 0.\end{cases}$$

Решение.



Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $(-\pi,\pi)$, значит она разложима в ряд Фурье.

Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

$$\left(\text{интегрируем по частям: }\left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \cdots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Ответ. Согласно теореме Дирихле, для интервалов (-π+2*k*π; π+2*k*π) $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ имеем равенство

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\right).$$

В точках $x = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ сумма ряда $S(x)$ равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

График функции $S(x)$ имеет вид