Лекция 6
13.4.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Разложение функций проводится в три этапа:

1) Вычисляются значения функции и ее производных

$$f(x_0),\ldots, f^{(n)}(x_0),\ldots .$$

2) Составляется ряд Тейлора.

3) Находится интервал, где ряд Тейлора сходится, т. е.

$$R_n(x) \to 0.$$

Теорема (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора). Если $\forall x \in \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right)$ выполняется:

а) функция $f\left(x\right)$ бесконечное число раз дифференцируема в этой окрестности,

б)

$$\exists M: \ \left|f^{(n)}\left(x\right)\right| \le M \quad \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right),$$

То в этом интервале функция разлагается в ряд Тейлора

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n.$$

Доказательство. По условию, $\forall x \ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M.$

Тогда для всякого x, принадлежащего интервалу,

$$\left|R_n(x)\right| \le M \frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но, как известно из теории пределов, факториал растет быстрее любой показательной функции. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \left|R_n(x)\right| = 0$ для всякого x, принадлежащего интервалу. Ч.Т.Д.

Особенно часто при разложении функций в степенной ряд используют ряд Маклорена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

В справочниках даны разложения в этот ряд и область сходимости ряда.

Посмотрим, как получаются эти формулы.

13.4.4.1. Разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена

$$f^{(n)}(x)=e^x,\ \ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,2,\ldots).$$

По формуле Тейлора $\quad e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x).$

Рассмотрим интервал $[-b,b]$, где b любое фиксированное число.

$$\forall x\in[-b,b]\Rightarrow e^x<e^b=M.$$

По теореме $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

Следовательно $\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,\infty).$

В частности для $x=1$ $\quad e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

13.4.4.2. Разложение функции $f(x)=\sin x$ в ряд Маклорена

$$f(0)=\sin x\big|_{x=0}=0,\quad f'(0)=\cos x\big|_{x=0}=1,$$

$$f''(0)=-\sin x\big|_{x=0}=0,\quad f'''(0)=-\cos x\big|_{x=0}=-1,\ldots,$$

$$\forall x \quad \left|f^{(n)}(x)\right|\le 1 \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

13.4.4.3. Разложение функции $f(x)=\cos x$ в ряд Маклорена.

Аналогично предыдущему разложению,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Замечание. Нечетные функции раскладываются по нечетным степеням. Четные функции раскладываются по четным степеням.

Если исследование остаточного члена $R_n(x)$ представляет затруднения (когда нельзя пользоваться доказанной теоремой), то:

1) Разлагаем функцию в ряд Тейлора.
2) Находим интервал сходимости.
3) Доказываем, что $R_n(x) \to 0$ для всякого x, принадлежащего интервалу сходимости.

Обычно ряд Тейлора сходится к $f(x)$.

13.4.4.4. Биномиальный ряд

$$f(x) = (1+x)^m,$$

где m - любое число.

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-(n-1))(1+x)^{m-n},$$

....

$$f(0) = 1,\ \ f'(0) = m, \ldots, f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-(n-1)), \ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$$

Найдем интервал сходимости.

Применим признак д’Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)n!x^{n+1}}{(n+1)!m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Ряд сходится при $|x|<1.$

Ряд расходится при $|x|>1.$

Оценим остаточный член $R_n(x)$ **для** $x \in (0,1)$.

$$\forall n > m-1 \quad (1+x)^{m-n+1} = \frac{1}{(1+x)^{n-(m-1)}} < 1.$$

Поэтому

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \left| m(m-1)...(m-n)(1+x)^{m-n-1} \right| < \left| m(m-1)...(m-n) \right|.$$

Здесь нельзя воспользоваться теоремой для оценки $R_n(x)$

т. к. ограничение для производной зависит от n .

Рассмотрим неравенство $\left| R_n(x) \right| \le \left| \dfrac{m(m-1)...(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|.$

Правая часть неравенства есть $(n+1)$-й член степенного ряда, сходящегося при $|x| < 1.$ Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \to 0.$

Для $x \in (-1,0)$ оценку остаточного члена не приводим.

Итак

$$\left(1+x\right)^{m}=1+mx+\frac{m\left(m-1\right)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{m\left(m-1\right)\ldots\left(m-\left(n-1\right)\right)}{n!}x^{n}+\ldots$$

Область сходимости ряда $x\in\left(-1,1\right)$.

Если m - целое и больше нуля, то получим формулу бинома Ньютона.

Для $m=-1$ $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n},\quad x\in\left(-1,1\right).$$

Для разных m могут входить в область сходимости одна или обе границы интервала $\left(-1,1\right)$.

13.4.4.5. Разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена

Из $\quad f(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,1)$ следует:

$$\int\limits_0^x f(x)dx=\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^x=\ln(1+x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

При $x=1$ ряд сходится условно. Поэтому окончательно $x\in(-1,1]$.

13.4.4.6. Разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена

Воспользуемся формулой

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in [-1,1],$$

т. к. при $x = \pm 1$ имеем знакочередующиеся ряды которые сходятся условно.

13.4.4.7. Примеры разложения функций в ряд Маклорена

Пример 32. Разложить функцию e^{-x} в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^{x} в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Подставим в эту формулу $-x$ вместо x.

Ответ. $$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Пример 33. Разложить функцию $\operatorname{ch} x$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением функций e^x и e^{-x} в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Тогда

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ответ.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Аналогично можно получить и другие формулы разложения функций в ряд Маклорена, например:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

13.4.5. Приближенное вычисление значений функций

Пусть функция $f(x)$ представима рядом Тейлора в окрестности точки x_0. Тогда точное значение функции можно вычислить по ряду Тейлора, а приближенное значение по $R_n(x)$. частичной сумме. Ошибку можно оценить по остатку ряда Рассмотрим на примерах.

Пример 34. Вычислить значение e с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение. Представим e^x рядом Маклорена

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x). \qquad \forall x \in [0, M] \quad \forall n \quad f^{(n)}(x) \le e^M.$$

По теореме об оценке остаточного члена ряда

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $M = 1$

$$R_n(x) < e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon.$$

Тогда $$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 8.$$

Ответ. $$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$

Пример 35. Сколько членов ряда Маклорена нужно учесть, чтобы аппроксимировать функцию $\sin x$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Представим функцию $\sin x$ рядом Маклорена

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

При $n = 1$, $\sin x \approx x$ остаточный член оценивается по формуле

$$|R_1(x)| < \frac{|x|^3}{6} \le \varepsilon.$$

Тогда $$|x|^3 \le 6\varepsilon = 0.006 \Rightarrow |x| \le 0.08 \Rightarrow |x| \in [0; 0.08).$$

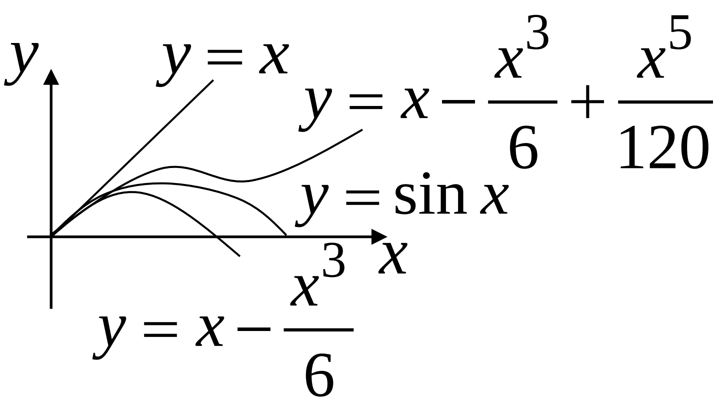
Следовательно, аппроксимация $n = 1$, $\sin x \approx x$ обеспечивает точность отработки функции на интервале $|x| \in [0; 0.08)$.

Аналогично можно показать, что

$$n=2,\ \ \sin x \approx x-\frac{x^3}{6},\ \ \left|R_2(x)\right|<\frac{|x|^5}{120}\le \varepsilon,\ \ |x|\in[0;0.4).$$

$$n=3,\ \ \sin x \approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ \ \left|R_3(x)\right|<\frac{|x|^7}{5040}\le \varepsilon,\ \ |x|\in[0;0.9).$$

Ответ.



$$n=1,\ \ |x|\in[0;0.08).$$

$$n=2,\ \ |x|\in[0;0.4).$$

$$n=3,\ \ |x|\in[0;0.9).$$

Пример 36. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,000001$.

Решение. А) Представим $\ln 2$ в виде ряда Маклорена

$$\ln 2 = \ln(1+x) = \left| x = 1 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad x \in (-1,1].$$

Ряд сходится, но очень плохо. Из теоремы Лейбница видно, что для обеспечения точности необходимо учесть $n = 100000$ членов ряда.

Покажем как улучшить сходимость.

Б)

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1].\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1).$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\quad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1+x}{1-x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}+\ldots\right).\qquad n=4.$$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\frac{1}{3^9}\right)\approx 0,693144.$$

Ответ. $\ln 2\approx 0,693144.$

13.4.6 Интегрирование функций

Найти

$$F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx.$$

Пусть известно разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора и пределы интегрирования лежат в интервале сходимости ряда. Тогда можно интегрировать почленно. В итоге получим ряд для функции $F(x)$, имеющий тот же интервал сходимости, что и исходный.

Если интеграл выражается через элементарную функцию, то получим ее разложение в ряд Тейлора. Если функция $F(x)$ в элементарных функциях не выражается, то найдем разложение неэлементарной функции в ряд Тейлора.

Зная оценку $R_n(x)$ для подынтегральной функции, можно получить оценку $R_n^*(x)$ для $F(x)$.

Пример 37. Представить интегральный синус $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}dx.$ рядом Маклорена

Решение.

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,\infty).$$

Ответ.

$$\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-...,\ \ x\in(-\infty,\infty).$$

Полученный ряд не сходится ни к какой элементарной функции.