Лекция 5
13.3.2. Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (**)$$

имеющий радиус сходимости R $(R \le \infty)$. Сумма ряда $S(x)$ есть функция определенная внутри интервала сходимости, а также на тех концах интервала, где ряд сходится.

Лемма 1. Степенной ряд (**) равномерно сходится на любом отрезке

$$\left[-b,b\right]\subset\left(-R,R\right).$$

Доказательство. Выберем $x_0:\ b<x_0<R.$

По теореме Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$ сходится.

$\forall x\in\left[-b,b\right]$ имеем $x<x_0\Rightarrow\left|a_n x^n\right|<\left|a_n x_0^n\right|.$

Последнее неравенство означает, что ряд (**) равномерно

сходится в $\left[-b,b\right]$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$ его мажоранта. Ч.Т.Д.

Лемма 2. Степенной ряд, составленный из производных ряда (**) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (**).

Доказательство. Допустим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Тогда радиус сходимости ряда (**) $R_{**}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Ряд производных имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. (***)

Радиус сходимости ряда из производных равен

$$R_{***}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Ч.Т.Д.

Замечание. Если составить ряд из производных ряда (***), то у него тоже радиус сходимости равен R.

Т. е. все степенные ряды, полученные последовательным дифференцированием ряда (**) имеют одинаковый радиус сходимости и равномерно сходятся в любом интервале, принадлежащим области сходимости.

Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.

Без доказательства.

Пример 30. Исследовать на непрерывность сумму $S(x)$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Решение. Функция $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ определена и непрерывна

всюду, за исключением точки $x=1.$ Но она является суммой ряда только при $|x|<1.$

Ответ. Сумма ряда непрерывна в области сходимости ряда $|x|<1.$

2) Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости

$$\int_a^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Без доказательства.

3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в интервале сходимости.

Без доказательства.

13.4. Разложение функций в степенные ряды
13.4.1 Ряд Тейлора

Сумма степенного ряда непрерывна и бесконечное число раз дифференцируема в интервале сходимости. Рассмотрим обратный вопрос. Когда можно утверждать, что функция $f(x)$ является суммой некоторого ряда?

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ ***разлагается в степенной ряд*** в окрестности точки x_0, если в некоторой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ этой точки она определена и $\forall x$ из этой окрестности совпадает с суммой некоторого степенного ряда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (*)$$

Теорема (о единственности разложения функции в степенной ряд). Если $\forall x \in \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right)$ выполняется (*), то

а) функция $f\left(x\right)$ бесконечное число раз дифференцируема в этой окрестности;

б)

$$a_n = \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство.

а) Как сумма степенного ряда, функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в области сходимости степенного ряда.

б) Найдем значения коэффициентов a_n. Для этого дифференцируем обе части равенства (*) почленно

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},\ldots,$$

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))a_n(x-x_0)^{n-m},\ldots.$$

Тогда $f(x_0)=a_0,\quad f'(x_0)=1!a_1,\ldots,f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\ldots.$

Следовательно $a_0=f(x_0),\ a_1=f'(x_0),\ldots,a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ч.Т.Д.

Определение. ***Рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд (*) относительно разности $(x-x_0)$, коэффициенты которого a_n выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0.

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$ - ***коэффициенты Тейлора*** функции $f(x)$

в точке x_0.

Замечания:

1. Если $x_0 = 0,$ то ряд называют ***рядом Маклорена***.

2. Используя определение, теорему можно переформулировать так: степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.

13.4.2. Условие разложимости функций в ряд Тейлора

При каких условиях ряд Тейлора для функции $f(x)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходится и его сумма равна $f(x)$?

Обозначим $T_n(x)$ - многочлен n -й степени (частичная сумма ряда Тейлора)

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Остаточный член ряда $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$. Сходимость ряда к функции $f(x)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty}T_n(x)=f(x)$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-T_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

$R_n(x)$ - ошибка аппроксимации функции $f(x)$ многочленом $T_n(x)$.

Пусть $f(x)$ - многочлен n -й степени. Продифференцируем его n раз. Последующие производные равны нулю. Получим ***формулу Тейлора для многочленов***

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Пример 31. Разложить функцию $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ по степеням $(x-1)$ $x_0 = 1.$

Решение.

$$f(1) = -1,\ \ f'(1) = \left.\left(1 - 2x + 6x^2\right)\right|_{x=1} = 5,\ \ f''(1) = \left.(-2 + 12x)\right|_{x=1} = 10,$$

$$f'''(1) = 12, \quad f^{(4)}(1) = \ldots = 0.$$

$$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + \frac{5}{1!}(x-1) + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

Ответ. $-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$

13.4.3. Остаточный член ряда Тейлора. Формула Тейлора

Запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Докажем теорему о структуре остаточного члена $R_n(x)$, которая позволит устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$, т. е. разлагается $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Остаточный член в форме Лагранжа

Теорема. Если $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для всякой точки, принадлежащей интервалу сходимости, остаточный член равен

$$R_n(x) = f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Запишем остаточный член в виде

$$R_n(x) = D_{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Найдем D_{n+1} такое, чтобы для всякого x, принадлежащего интервалу сходимости, выполнялось

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+D_{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зафиксируем $x = x_1 \in \left(x_0 - \left|\theta(x-x_0)\right|, x_0 + \left|\theta(x-x_0)\right|\right).$

Тогда

$$D_{n+1} = \frac{f(x_1) - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k}{\dfrac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Докажем, что это выражение равно $f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right)$.

При $n=0$ из теоремы Лагранжа

$$D_1=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}=f'\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right).$$

Для других n построим вспомогательную функцию $F\left(x\right)$, удовлетворяющую теореме Ролля. Пусть

$$F\left(x\right)=f\left(x_1\right)-f\left(x\right)-f'\left(x\right)\left(x_1-x\right)-\ldots-\frac{f^{(n)}\left(x\right)}{n!}\left(x_1-x\right)^n+$$

$$+D_{n+1}\frac{\left(x_1-x\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}. \qquad F\left(x_1\right)=0.$$

При $x=x_0$ заменив D_{n+1} его значением, получим $F\left(x_0\right)=0$.

Найдем $F'(x)$.

$$F'(x) = -f'(x) - f''(x)(x_1 - x) + f'(x) -$$

$$-\frac{f'''(x)}{2!}(x_1 - x)^2 + f''(x)(x_1 - x) - \ldots -$$

$$\underline{-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_1 - x)^{n-1} + \underline{D_{n+1}\frac{(x_1 - x)^n}{n!}}.$$

Только подчеркнутые члены не сокращаются.
Производная $F'(x)$ существует во всех точках интервала.
Выноса общий множитель за скобки, получим

$$F'(x) = \frac{(x_1 - x)^n}{n!}\left[-f^{(n+1)}(x) + D_{n+1}\right].$$

Условия теоремы Ролля для функции $F(x)$ выполнены:

$$F(x_0)=0, \quad F(x_1)=0,$$

$$\exists F'(x) \quad \forall x \in \left(x_0-\left|\theta(x-x_0)\right|, x_0+\left|\theta(x-x_0)\right|\right).$$

Тогда $\exists\theta$ такая, что $F'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)=$

$$=\frac{\left(x_1-x_0-\theta(x-x_0)\right)^n}{n!}\left[-f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)+D_{n+1}\right]=0.$$

Тогда $D_{n+1}=f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)$, т. е.

$$R_n(x_1)=f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Т. к. x_1 - любая точка интервала, то теорема доказана.

Формула Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

При выводе формулы предполагалось, что $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ -й, где n какое-то число. Другие производные нас не интересовали.

Частные случаи

1) $$n=0 \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(x-x_0).$$

Это формула Лагранжа.

2)
$$n=1 \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Тогда $$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Это линейная аппроксимация.