Лекция 4
13.2. Функциональные ряды
13.2.1. Основные определения. Область сходимости функционального ряда

Рассмотрим ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Такие ряды называют ***функциональными***. Предполагается, что функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на множестве M для всякого n.

При значении $x=x_0$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

Если данный числовой ряд сходится, то точка $x=x_0$ называется ***точкой сходимости*** функционального ряда.

Множество $M_1\subset M$ всех точек сходимости называется ***областью сходимости*** функционального ряда. Область сходимости – промежуток оси Ox.

Частичная сумма первых членов ряда обозначается $S_n(x)$; ***остаток ряда*** - $r_n(x)$.

Предельная сумма $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, определенная на множестве $M_1 \subset M$, называется ***суммой ряда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве M_1.

Символическое обозначение

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \quad x \in M_1$$

или

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in M_1.$$

При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных. Для ряда это может не иметь место.

Пример 21. Определить для функционального ряда область сходимости и сумму ряда в области сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Решение:

1) Пусть $|x|<1$. В этом случае данный ряд – бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно ряд сходится.

2) Пусть $|x|\geq 1$. В этом случае данный ряд – бесконечная неубывающая геометрическая прогрессия. Следовательно не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится.

Ответ. Область сходимости данного функционального ряда $|x|<1$. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$S(x)=\frac{1}{1-x}.$$

13.2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в области D, если

$\forall\varepsilon\ \exists N(\varepsilon):\ \forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|r_n(x)| < \varepsilon\ \ \forall x \in D.$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов

Теорема. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ такой, что $\forall n$ и $\forall x \in D$ $|u_n(x)| \le v_n$.

Без доказательства.

В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ называют ***мажорантой*** для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или ***мажорирующим рядом***.

Пример 22. Найти область равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

Решение. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится $(\alpha = 2 > 1).$

Ответ. По признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и обобщенный гармонический ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ его мажоранта.

13.2.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Во всех теоремах предполагается, что область сходимости ряда принадлежит оси Ox.

Теорема 1. Если ряд из непрерывных функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в D, то его сумма есть функция, непрерывная в этой области.

Без доказательства.

Теорема 2. Если ряд из непрерывных функций $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

равномерно сходится на $[a,b]$ к сумме ряда $S(x)$, то

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

Без доказательства.

Замечание. Теорема 2 справедлива и для переменного верхнего предела

$$\int_a^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)dx \quad a \le x \le b.$$

Теорема 3. Если ряд из функций, имеющих непрерывные производные в D, сходится поточечно в D к сумме $S(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

а ряд из производных $u_n'(x)$ сходится равномерно в D, то функция $S(x)$ дифференцируема в D и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Без доказательства.

Замечание. Теоремы 2 и 3 называются теоремами о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.

13.3 Степенные ряды
13.3.1 Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости

Определение. ***Степенным рядом*** называют функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \qquad (*)$$

где $x_0,\ a_n$ - действительные числа.

Если $x_0 = 0,$ то имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$ (**)

В дальнейшем будем рассматривать ряды вида (**), т. к. они сводятся к рядам вида (*) подстановкой $x - x_0 = x'.$

Члены степенного ряда определены $\forall x \in \left(-\infty, +\infty\right).$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (**) сходится в точке

$$x_0 \neq 0,$$

то он сходится абсолютно в интервале

$$\left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right).$$

Доказательство. Т. к. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$

Тогда $\exists M > 0: \ \forall n \ \left|a_n x_0^n\right| < M$. Запишем (**) так: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

Ряд из абсолютных величин сходится по признаку сходимости знакоположительных рядов в форме неравенств

$$\left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|, \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1,$$

где в правой части первого неравенства общий член сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Значит ряд (**) сходится абсолютно на интервале $\left(-|x_0|, |x_0|\right)$.

Ч.Т.Д.

Интервал сходимости степенного ряда

Возможны три случая:

1. ***Область сходимости состоит только из одной точки***

Пример 23. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Решение. $\forall x \neq 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| n^n x^n \right| > 1$ не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда, т.е. числовой ряд расходится.

Ответ. Область сходимости ряда точка: $x = 0.$

2. ***Область сходимости вся числовая ось*** $D=(-\infty,\infty)$.

Пример 24. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}.$$

Решение. $\forall x \ \exists N: \ \forall n>N \quad \left|\frac{x}{n}\right|<1$

и для $n>N$ члены ряда меньше сходящейся геометрической прогрессии. Следовательно числовой ряд сходится (см. свойства сходящихся числовых рядов).

Ответ. Область сходимости ряда: $D=(-\infty,\infty)$.

3. ***Область сходимости ограничена*** $D=(-R,R)$.

Пример 25. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Решение. Данный ряд, есть сумма геометрической прогрессии, которая имеет конечное значение (как мы помним из школы) при

$$|x|<1$$

Ответ. Область сходимости ряда: $D=(-1,1)$.

Теорема. Степенной ряд (**) абсолютно сходится для всех значений x, меньших по абсолютной величине некоторого числа R $\left(|x| < R\right)$, называемого ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Без доказательства.

Следствие. Если ряд (**) расходится при $x = x_1$, то он расходится

$$\forall x : |x| > |x_1|.$$

Определение. Интервал $\left(-R, R\right)$ называется ***интервалом сходимости***.

В примере 23 интервал сходимости $\left\{0\right\}$.

В примере 24 интервал сходимости $\left(-\infty, \infty\right)$.

В примере 25 интервал сходимости $\left(-1,1\right)$.

Определение радиуса сходимости для степенных рядов

1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn+s}, \quad u_n = a_n x^{pn+s},$

где степень x - линейная целочисленная функция аргумента n.

Применим признак д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{pn+p+s}}{a_n x^{pn+s}}\right| = |x|^p \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Для сходимости ряда необходимо выполнение неравенства

$$|x|^p \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow |x|^p < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| \Rightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|^{1/p}.$$

Следовательно в данном случае, радиус сходимости степенного ряда определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|^{1/p}.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn+s}, \quad u_n = a_n x^{pn+s}$,

где степень x - линейная целочисленная функция аргумента n. Если $\forall n \;\; a_n \neq 0$, то применим радикальный признак Коши. Проводя аналогичные предыдущему слайду выкладки, получим формулу для определения радиуса сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[pn]{|a_n|}}.$$

3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{N(n)}, \quad u_n = a_n x^{N(n)}$,

где степень x – произвольная целочисленная функция аргумента n. Здесь для определения радиуса сходимости применяются признак д'Аламбера или радикальный признак Коши.

Пример 26. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Ответ. Радиус сходимости ряда $R = \infty$.

Область сходимости ряда $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 27. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Интервал сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow x \in (-1,1).$$

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) x=1, тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который расходится. Граница не включается в область сходимости.

Б) x = -1, тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n}}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится (хотя и условно), т.к. он удовлетворяет всем условиям признака Лейбница:

1) $\forall n \quad \left|u_n\right| = \frac{1}{n} > \left|u_{n+1}\right| = \frac{1}{n+1},$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|u_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Ответ. Радиус сходимости степенного ряда $R = 1.$

Область сходимости степенного ряда $x \in \left[-1,1\right).$

Пример 28. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2},\quad a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{\left(2(n+1)-1\right)^2}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n-1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=1,$$

Интервал сходимости ряда $x\in(-1;1)$.

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) $x = 1$, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница

1. $\forall n \quad |u_n|=\frac{1}{(2n-1)^2}>|u_{n+1}|=\frac{1}{(2n+1)^2},$

2. $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0.$ Граница включается в область сходимости.

Б) x = -1, тогда ряд примет вид $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница по аналогии с предыдущим рядом.

Эта граница также включается в область сходимости степенного ряда.

Ответ. Радиус сходимости степенного ряда $R=1.$

Область сходимости степенного ряда $x\in[-1,1].$

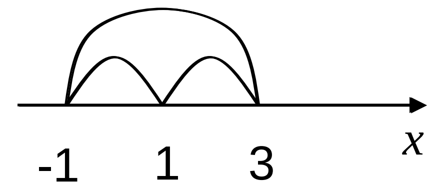
Пример 29. Определить область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n},$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Решение. Определим радиус сходимости данного степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n} = 2.$$



Интервал сходимости ряда $x \in (-1;3)$.

Исследуем ряд на границах интервала сходимости:

А) x = -1, тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница

1. $\forall n \quad |u_n| = \frac{1}{n} > |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1},$

2. $\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

Граница включается в область сходимости.

Б) $x = 3$, тогда ряд примет вид $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Это расходящийся гармонический ряд.

Эта граница не включается в область сходимости степенного ряда.

Ответ: Радиус сходимости степенного ряда $R = 2.$

Область сходимости степенного ряда $x \in [-1; 3).$