Лекция 3
13.1.4.3 Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

при $l < 1$ - ряд сходится,

при $l > 1$ - ряд расходится,

при $l = 1$ - вопрос остается открытым (ряд может сходится или расходиться).

Без доказательства.

Пример 15. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$$

Ответ. Ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 16. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}}{2}=\frac{e}{2}>1$$

Ответ. Ряд расходится по радикальному признаку Коши.

13.1.4.4. Интегральный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$, члены которого

являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $u_1 = f(1), \ldots, u_n = f(n), \ldots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1, \infty)$.

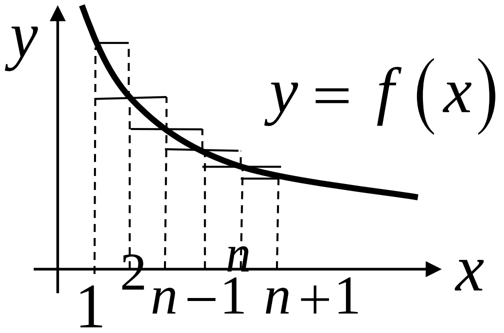
Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

и расходится, если интеграл расходится.

Доказательство.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линией $y = f(x)$ с основанием от 1 до n.



Площадь ее равна $I_n = \int\limits_1^n f(x)dx.$ Рассмотрим две ступенчатые фигуры:

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = S_n - u_1; \quad f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = S_n - u_n.$$

Сравним площади $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n \Rightarrow S_n < I_n + u_1; \; S_n > I_n + u_n.$

Рассмотрим два варианта.

1) Интеграл сходится, т.е. $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n.$ Тогда $I_n < I \Rightarrow S_n < u_1 + I.$
   На основании леммы ряд сходится.

2) Интеграл расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty.$ Тогда из $S_n > u_n + I_n$
   следует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится. Ч.Т.Д.

Пример 17. Исследовать на сходимость или расходимость обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$

Решение. Ряд знакоположительный. Функция $f(x)=1/x^p$ монотонно убывает на интервале $[1,\infty)$. Применим интегральный признак Коши

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(x^{-p+1}-1\right).$$

Рассмотрим случаи: 1) $p>1$ $I=\frac{1}{p-1}$; 2) $p<1$ $I=\infty$;

3) $p=1,$ $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty.$

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}\text{сходится, если} & p>1,\\ \text{расходится, если} & p\le 1.\end{cases}$

13.1.4.5. Оценка ошибки при приближенных вычислениях суммы ряда

$$S - S_n = r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \quad \forall n, \qquad r_n < \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Данную задачу можно решать в двух вариантах:

Задача 1. Оценить ошибку в вычислении суммы ряда ε при суммировании заданного конечного числа членов ряда n.

Задача 2. Оценить потребное количество суммируемых членов ряда n для обеспечения точности ε вычисляемой суммы ряда.

Пример 18. Рассмотрим задачу 2 на примере обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1. \qquad r_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_n^{\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Решение. Для заданного ε можно оценить n из условия

$$r_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \le \varepsilon.$$

Зададим точность вычисления суммы ряда $\varepsilon = 0,001$ и рассмотрим несколько случаев:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $p = 2$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{n} \le 0,001,\ n = 1000.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $p = 3$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{2n^2} \le 0,001,\ n = 24.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $p = 4$, $\varepsilon = 0,001$ $\quad r_n < \frac{1}{3n^3} \le 0,001,\ n = 7.$

13.1.5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Примеры знакопеременных рядов

1) $1+2-3-4-5+6+7-\ldots,$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\ldots,$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}.$

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Пример 19. Исследовать ряд на условную или абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$$

Решение. Ряд знакопеременный. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|.$$

Данный ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним со сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \qquad q=\frac{1}{2}<1$$

(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия)

$$u_n=\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|\le v_n=\frac{1}{2^n}.$$

Ряд из абсолютных величин сходится.

Ответ. Исходный ряд сходится абсолютно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) Если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

абсолютно, то возможна перестановка бесконечного множества его членов.

Замечание. Если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

условно, то при перестановке бесконечного множества его членов можно получить расходящийся ряд или изменится сумма ряда.

2) Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать.

Например,

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\right)=$$

$$=a_1b_1+\left(a_2b_1+a_1b_2\right)+\ldots+\left(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\ldots+a_1b_n\right)+\ldots\ .$$

Сумма полученного ряда равна произведению сумм исходных рядов.

13.1.6. Знакочередующиеся ряды $\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\ \ u_n \geq 0.$

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд сходится.

Причем $|S| < u_1,$ $|r_n| < u_{n+1}.$

Доказательство. Возьмем для определенности $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n.$

Рассмотрим последовательность сумм

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Она возрастающая. Причем

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1.$$

Рассмотрим последовательность сумм

$$S_{2m+1} = u_1 - \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2m} - u_{2m+1})\right].$$

Выражение в квадратных скобках возрастающая последовательность. Следовательно последовательность S_{2m+1}

убывающая и $S_{2m+1} < u_1$. Значит $|S| < u_1$.

Далее $S_2 < S_4 < S_6 < \ldots$; $S_1 > S_3 > S_5 > \ldots$. $\forall m,k \;\; S_{2m} < S_{2k+1}$

т.к. если $m < k$, то $S_{2m} < S_{2k} = S_{2k+1} - u_{2k+1} < S_{2k+1}$;

если $m > k \;\; (m = k)$, то $S_{2m} = S_{2m+1} - u_{2m+1} < S_{2m+1} < S_{2k+1}$.

Последовательность с четными индексами возрастает и ограничена сверху. Значит существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$,

т. к. $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$; $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Если бы перед рядом стоял минус, то картина зеркально отразится относительно точки $x = 0$.

Остаток ряда $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$ удовлетворяет условиям признака Лейбница. Поэтому его сумма $|r_n| < u_{n+1}$. Ч.Т.Д.

Пример 20. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Решение. Ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница.

1) $$|u_1|=\frac{1}{1}=1>|u_2|=\frac{1}{2}>\ldots>|u_n|=\frac{1}{n}>\ldots,$$

2) $$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно ряд сходится. Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который расходится.

Ответ. Исходный ряд сходится условно.