Лекция 2

13.1.4. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости ряда

13.1.4.1. Признаки сравнения

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ такой, что $\forall n \;\; u_n > 0$.

Лемма. Если частичные суммы ряда с положительными членами ограничены сверху $S_n < M$, то ряд сходится.

Доказательство. $S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots$, т.к. $u_n > 0$. Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то по признаку сходимости Вейерштрасса она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S < M$. Ч.Т.Д.

Следствия:

Если ряд с положительными членами сходится, то $S_n < S$.

Если ряд с положительными членами расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Признак сравнения (в форме неравенства)

Теорема. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2), \qquad \left(u_n > 0,\ v_n > 0\right) \quad \text{и} \quad \forall n \ \ u_n \le v_n. \qquad (*)$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится ряд(1);

2) если расходится ряд (1), то расходится ряд (2).

Доказательство.

1)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

$\sigma_n < \sigma \Rightarrow S_n \le \sigma_n < \sigma.$ В силу леммы ряд (1) сходится.

2) $S_n \to \infty,\ \sigma_n \ge S_n \Rightarrow \sigma_n \to \infty.$ Ряд (2) расходится. Ч.Т.Д.

Признак также справедлив, если условие (*) выполняется с какого-либо номера $N > 1$ в силу свойств сходящихся рядов.

Пример 10. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \alpha=\frac{1}{2};$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с гармоническим рядом, который расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad \forall n \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Ответ. Следовательно, исходный ряд тоже расходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств.

Предельный признак сравнения

Теорема. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2), \qquad \left(u_n > 0,\ v_n > 0\right).$$

Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A,\ \ 0 < A < \infty,$ то ряды (1) и (2)

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon.$$

Пусть ряд (2) сходится. Тогда по свойству сходящихся рядов

сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ и т.к. $u_n < (A+\varepsilon)v_n \ \ \forall n > N$

следовательно ряд (1) сходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств.

Если ряд (2) расходится, то в силу $u_n > (A-\varepsilon)v_n \quad \forall n > N$ ряд (1) расходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств. Ч.Т.Д.

Замечание. Если $A \to \infty$ или $A \to 0$, то предельный признак сравнения не применим. Необходимо применить другой признак сходимости.

Для использования признаков сравнения применяют ***калибровочные ряды***. В частности:

1. **Бесконечная геометрическая прогрессия.** Как известно из школы

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^{n-1}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1} = \begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}, & |q|<1; \\ \text{нет предела}, & |q|\ge 1. \end{cases}$$

В первом случае ряд сходится, во втором – расходится.

2. ***Обобщенный гармонический ряд (Ряд Дирихле)***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

При $\alpha>1$ ряд сходится, при $\alpha\le 1$ ряд расходится (почему – узнаем позднее, когда будем изучать достаточный интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов).

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^2 - 1}.$$

Решение. А) Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\alpha = 1,\ \text{ряд расходится}).$$

$$u_n = \frac{4n}{3n^2 - 1} = \frac{\frac{4n}{3}}{n^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{n - \frac{1}{3n}} > v_n = \frac{1}{n}.$$

Ответ. Исходный ряд также расходится по признаку сравнения знакоположительных рядов в форме неравенств.

Решение. Б) Ряд знакоположительный. Применим предельный признак сравнения. Сравним с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \left(\alpha = 1,\ \text{ряд расходится}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n^2 - 1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Ответ. Исходный ряд также расходится по предельному признаку сравнения знакоположительных рядов.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^3 - 1}.$$

Решение. А) Ряд знакоположительный. Применим признак сравнения в форме неравенств. Сравним с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(\alpha = 2,\ \text{ряд сходится}\right).$$

$$u_n = \frac{4n}{3n^3 - 1} = \frac{\frac{4n}{3n}}{n^2 - \frac{1}{3n}} = \frac{\frac{4}{3}}{n^2 - \frac{1}{3n}} > v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Ответ. О сходимости исходного ряда мы ничего сказать не можем.

Решение. Б) Ряд знакоположительный. Применим предельный признак сравнения. Сравним с обобщенным гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\alpha = 2, \text{ ряд сходится}).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n^3 - 1} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Ответ. Исходный ряд также сходится по предельному признаку сравнения знакоположительных рядов.

Замечание. Последний пример показывает, что при исследовании ряда на сходимость, нужно правильно выбирать применяемый признак сходимости ряда.

13.1.4.2. Признак д’Аламбера

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\forall n \quad u_n > 0).$

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$ то

при $\rho < 1$ - ряд сходится,

при $\rho > 1$ - ряд расходится,

при $\rho = 1$ - вопрос о сходимости ряда остается открытым (ряд может сходится или расходиться).

Доказательство. Пусть $\rho < 1.$ По определению предела

$$\exists N: \forall n > N \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = \rho_1, \ \varepsilon > 0.$$

Для достаточно малых ε $\quad \rho + \varepsilon = \rho_1 < 1.$ Тогда

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \rho_1, \ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \rho_1, \ \ldots \Rightarrow u_{N+1} < \rho_1 u_N, \ u_{N+2} < \rho_1^2 u_N, \ \ldots$$

т.е. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n < u_N \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n.$ Т.к. последний ряд есть бесконечно

убывающая геометрическая прогрессия (т.е. сходящийся ряд), то исходный ряд сходится по признаку сравнения в форме неравенства.

Пусть $\rho > 1.$ Тогда, начиная с некоторого номера $N,$ $u_{n+1} > u_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0,$ т.е. ряд расходится. Ч.Т.Д.

Пример 13. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д'Аламбера

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ответ. Ряд сходится по признаку д`Аламбера.

Пример 14. Исследовать на сходимость или расходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n}.$$

Решение. Ряд знакоположительный. Применим признак д’Аламбера.
$$u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2-2(n+1)},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2-2(n+1)}\cdot\frac{n^2-2n}{1}=1.$$

Ответ. О сходимости ряда ничего сказать нельзя. Необходимо применить другой достаточный признак сходимости.