Лекция 1
13. Ряды
13.1. Числовые ряды
13.1.1. Пример постановки задачи

Рассмотрим известную из школы геометрическую прогрессию $\boldsymbol{u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1}}$

или
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

где u_1 - первый член прогрессии,

$u_k = u_1 q^{k-1}\ \left(k = \overline{1,n}\right)$ - общий член прогрессии,

q - знаменатель прогрессии,

n - число членов прогрессии.

Пусть S_n - сумма n членов геометрической прогрессии, тогда
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (1)$$
и
$$S_n = \frac{u_1 - u_1 q^n}{1 - q}.$$

Пусть теперь число членов прогрессии стремится к бесконечности $(n \to \infty)$, тогда получаем бесконечную геометрическую прогрессию, члены которой составляют бесконечную последовательность $\{u_n\}$ с ***общим членом***

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

В данном случае известен закон (правило)

$$f(n) = u_n = u_1 q^{n-1},$$

по которому получен общий член геометрической прогрессии

$$u_n = f(n) \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Из (1) следует $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

или $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 - u_1 q^n}{1-q} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

В этом примере присутствуют все элементы для введения важнейших объектов математического анализа – рядов, которые являются инструментом решения прикладных задач математики и физики.

13.1.2. Определение числового ряда и его суммы. Остаток ряда. Основные свойства сходящихся рядов

Пусть дана бесконечная последовательность

$$u_1, u_2, ..., u_n, ...$$

Определение. Выражение $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ называется ***рядом***, а числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ - ***членами ряда***.

Краткая запись $\sum_{n=l}^{m} u_n$ - символическое обозначение суммирования членов (элементов) $u_l + u_{l+1} + \ldots + u_{m-1} + u_m$,

где принято:

$\sum$ - обозначение операции суммирования нескольких членов,

n - индекс суммирования,

l - нижний индекс первого слагаемого,

m - нижний индекс последнего слагаемого.

u_n - ***общий член ряда***.

Ряд считается заданным, если задана целочисленная функция f и $u_n = f(n)$.

Примеры числовых рядов

Пример 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$u_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Пример 2.

$$u_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Иногда ряд задают рекуррентной формулой.

Пример 3.

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{3} u_{n-2}.$$

Тогда $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{12},$ и т.д.

Пусть дан ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$.

Назовем $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ***частичной суммой ряда***.

Образуем последовательность частичных сумм $\{S_n\}$

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Определение. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд ***сходящийся*** и S - его ***сумма***.

Если последовательность $\{S_n\}$ не стремится к пределу, то ряд ***расходящийся***.

Последнее имеет место в двух случаях:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty;$

2) не существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n.$

Таким образом, вопрос о сходимости ряда эквивалентен вопросу о существовании конечного предела для последовательности частичных сумм $\{S_n\}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad \left(a \neq 0,\ |q| < 1\right);$$

Решение. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Как мы знаем из школы,

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1-q} = S.$$

Ответ. Ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0,\ q = 1);$$

Решение.

$$S_n = na, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Ответ. Ряд расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0,\ q = -1);$$

Решение. $S_1 = -a,\ S_2 = 0,\ S_3 = -a,\ \ldots;$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{не существует.}$$

Ответ. Ряд расходится.

Определение. ***Остатком*** или ***остаточным членом*** сходящегося ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n, обозначается

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Основные свойства сходящихся рядов

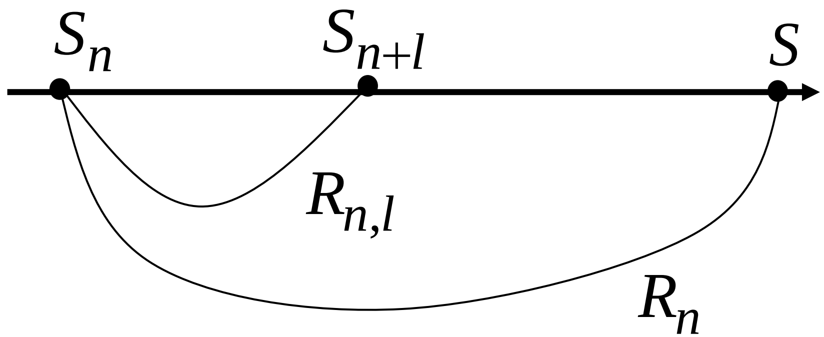
Теорема 1. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, то сходится любой из его остатков

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Доказательство. По условию, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = S_n.$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_{n+l} = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+l} u_k = S_n + R_{n,l}.$$



$$R_{n,l} = S_{n+l} - S_n$$

$$\lim_{l\to\infty} R_{n,l} = \lim_{l\to\infty}\left(S_{n+l} - S_n\right) \Rightarrow \ R_n = \lim_{l\to\infty} S_{n+l} - S_n \Rightarrow$$

$R_n = S - S_n$ - конечное число,

т.е. остаток R_n сходится. Ч.Т.Д.

Следствие. Если ряд сходится, то сходится и ряд, в котором выброшено или прибавлено конечное число членов.

Теорема 2. Если ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ сходится, то сходится ряд $\lambda u_1+\lambda u_2+\ldots+\lambda u_n+\ldots$.

Доказательство. По условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S. \qquad \sigma_n=\lambda u_1+\lambda u_2+\ldots+\lambda u_n=\lambda S_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\left(\lambda S_n\right)=\lambda\lim_{n\to\infty}S_n=\lambda S.$$

Ч.Т.Д.

Теорема 3. Если ряды $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и $v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}v_n=S_2,$$

то сходится ряд $\left(u_1\pm v_1\right)+\left(u_2\pm v_2\right)+\ldots+\left(u_n\pm v_n\right)+\ldots=S_1\pm S_2$.

Доказательство.

$$\sigma_n=\left(u_1\pm v_1\right)+\left(u_2\pm v_2\right)+\ldots+\left(u_n\pm v_n\right)=S_{1,n}\pm S_{2,n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_{1,n}\pm S_{2,n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_{1,n}\pm\lim_{n\to\infty}S_{2,n}=S_1\pm S_2.$$

Ч.Т.Д.

13.1.3. Необходимый признак сходимости ряда. Обобщенный гармонический ряд

Теорема (Необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0.$$

Ч.Т.Д.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится.

Вообще стремление $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не означает сходимости ряда.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\ldots+\frac{n}{100n+1}+\ldots,$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{100}\neq 0.$$

Не выполняется необходимый признак сходимости.

Ответ. Ряд расходится.

Обобщенный гармонический ряд (гармонический ряд)

Определение. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α любое действительное число, называется ***обобщенным гармоническим рядом***.

Определение. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $(\alpha = 1)$ называется ***гармоническим рядом***.

Пример 8. Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Решение. Запишем ряд в виде (разбив его, начиная с третьего члена, на группы по $2^k,\ k=1,2,\ldots$ слагаемых)

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\to\infty.$$

Новый ряд расходится.

Ответ. Исходный ряд также расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \alpha=\frac{1}{2};$$

Решение. Проверим выполнение необходимого признака сходимости

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется.

Запишем и оценим частичную сумму ряда

$$S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

Ответ. Исходный ряд расходится.

Замечание. Последние три примера показывают, что выполнение необходимого признака сходимости не говорит о сходимости ряда, а невыполнение, показывает его расходимость.