Лекция 9

Пример 38. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = -4x - y - 4z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

Решение. Это однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применим подстановки Эйлера $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$.

Найдем производные неизвестных функций и подставим функции и их производные в систему дифференциальных уравнений. Получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -rk_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + k_3 = 0, \\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad - k_2 - rk_3 = 0. \end{cases}$$

Пример 38. (продолжение)

Для того, чтобы система имела ненулевое решение, определитель должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -4 & -(1+r) & -4 \\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = \left(4 - r^2\right)(r+1) = 0.$$

Получили характеристическое уравнение, решая которое найдем его корни

$$r_1 = -1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 2.$$

Пример 38. (продолжение)

Рассмотрим корень $r_1 = -1.$ Два уравнения алгебраической системы должны быть линейно независимы. Выберем для решения первое и третье уравнения

$$r_1 = -1, \ \begin{cases} k_1^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \\ -k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем, что

$$k_1^{(1)} = 1, \ k_2^{(1)} = -1, \ k_3^{(1)} = -1.$$

Следовательно $x_1 = e^{-t}, \ y_1 = -e^{-t}, \ z_1 = -e^{-t}.$

Применяя данную процедуру к корням $r_2 = -2, \ r_3 = 2,$ получим

Пример 38. (продолжение)

$$r_2=-2,\ \begin{cases}2k_1^{(2)}+k_3^{(2)}=0,\\ -k_2^{(2)}+2k_3^{(2)}=0,\end{cases}\ k_1^{(2)}=1,\ k_2^{(2)}=-4,\ k_3^{(2)}=-2.$$

$$x_2=e^{-2t},\ \ y_2=-4e^{-2t},\ \ z_2=-2e^{-2t}.$$

$$r_3=2,\ \begin{cases}-2k_1^{(3)}+k_3^{(3)}=0,\\ -k_2^{(3)}-2k_3^{(3)}=0,\end{cases}\ k_1^{(3)}=1,\ \ k_2^{(3)}=-4,\ \ k_3^{(3)}=2.$$

$$x_3=e^{2t},\ \ y_3=-4e^{2t},\ \ z_3=2e^{2t}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+C_3e^{2t},\\ y=-C_1e^{-t}-4C_2e^{-2t}-4C_3e^{2t},\\ z=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}+2C_3e^{2t}.\end{cases}$$

б) Если ***среди простых корней характеристического уравнения есть комплексно сопряженные***, то решение будет в виде комплексных функций действительной переменной.

Чтобы перейти к действительной форме используют следующее: если

$$x_1 + ix_2,\ \ y_1 + iy_2,\ \ z_1 + iz_2$$

являются решением, то $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ тоже решения.

Пример 39. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Это однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применим подстановки Эйлера $x = k_1 e^{rt},\ y = k_2 e^{rt},\ z = k_3 e^{rt}.$

Найдем производные неизвестных функций и подставим функции и их производные в систему дифференциальных уравнений. Получим однородную систему алгебраических уравнений. Приравнивая определитель системы к нулю, получим характеристическое уравнение
$$\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37 = 0,$$

решая которое, найдем его корни $r_{1,2} = -6 \pm i.$

Пример 39. (продолжение)

Рассмотрим корень $r_1 = -6 + i$. Линейно независимым является одно уравнение. Выберем для решения первое уравнение

$$(-1 - i)k_1 + k_2 = 0.$$

Решая его, найдем

$$k_1 = 1,\; k_2 = 1 + i.$$

Решением для данного корня является

$$\begin{cases} x = e^{(-6+i)t} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t, \\ y = (1+i)e^{(-6+i)t} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$$

$$x_1 = e^{-6t}\cos t,\; y_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$$
$$x_2 = e^{-6t}\sin t,\; y_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Пример 39. (продолжение)

Рассмотрим корень $r_2 = -6 - i.$ Решение приведет к решениям нормальной системы, линейно зависимым с найденными ранее решениями $x_1, x_2, y_1, y_2.$

Следовательно, общее решение системы дифференциальных уравнений

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right),$$
$$y = e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t - \sin t\right) + C_2\left(\cos t + \sin t\right)\right).$$

в) ***Для кратных корней*** решение усложняется. Если для одного уравнения можно сразу написать структуру общего решения, то здесь иначе. Покажем на примерах.

Пример 40. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 3x + 3y - 2z. \end{cases}$$

Решение. Это однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применим подстановки Эйлера $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$.

Найдем производные неизвестных функций и подставим функции и их производные в систему дифференциальных уравнений. Получим однородную систему алгебраических уравнений. Приравнивая определитель системы к нулю, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 3 & 3 & -2-r \end{vmatrix} = -r\left(r^2 - 2r + 1\right) = 0.$$

Пример 40. (продолжение)

Решая его, найдем

$$r_1 = 0,\ \ r_{2,3} = 1.$$

Рассмотрим корень $r_1 = 0$. Два уравнения алгебраической системы должны быть линейно независимы. Выберем для решения первое и второе уравнения

$$r_1 = 0,\ \begin{cases} 2k_1^{(1)} + k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \\ k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \end{cases}\ k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 1,\ \ k_3^{(1)} = 3.$$

Решая полученную систему, найдем, что

$$k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 1,\ \ k_3^{(1)} = 3.$$

Следовательно

$$x_1 = C_1,\ \ y_1 = C_1,\ \ z_1 = 3C_1.$$

Пример 40. (продолжение)

Для кратного корня $r_{2,3}=1$ система уравнений сводится к одному уравнению, например,

$$k_1^{(2)}+k_2^{(2)}-k_3^{(2)}=0.$$

Произвольно можно задать две величины $k_1^{(2)}=C_2,\ k_2^{(2)}=C_3.$

Тогда

$$k_3^{(2)}=C_2+C_3.$$

Следовательно

$$x=C_2e^t,\ y=C_3e^t,\ z=\left(C_2+C_3\right)e^t,$$

т.е.

$$x_2=e^t,\ y_2=0,\ z_2=e^t;$$
$$x_3=0,\ y_3=e^t,\ z_3=e^t.$$

Пример 40. (продолжение)

Получили фундаментальную систему решений, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ e^t & 0 & e^t \\ o & e^t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0 \qquad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^t, \\ y &= C_1 + C_3 e^t, \\ z &= 3C_1 + (C_2 + C_3) e^t. \end{aligned}$$

Пример 41. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - y + 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$$

Решение. Это однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применим подстановки Эйлера $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$.

Найдем производные неизвестных функций и подставим функции и их производные в систему дифференциальных уравнений. Получим однородную систему алгебраических уравнений. Приравнивая определитель системы к нулю, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 & 0 \\ 4 & -1-r & 2 \\ 0 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = -\left(1-r^2\right)\left(1+r\right) = 0.$$

Пример 41. (продолжение)

Решая его, найдем $r_1 = -1,\ r_{2,3} = 1.$

Применяя алгоритм предыдущих примеров, найдем

$$r_1 = -1,\ \begin{cases} 2k_1^{(1)} - k_2^{(1)} = 0, \\ 4k_1^{(1)} + 2k_3^{(1)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(1)} = 1,\ k_2^{(1)} = 2,\ k_3^{(1)} = -2.$$

$$x_1 = e^{-t},\ y_1 = 2e^{-t},\ z_1 = -2e^{-t}.$$

$$r_{2,3} = 1,\ \begin{cases} -k_2^{(2)} = 0, \\ 4k_1^{(2)} - 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases} \quad k_1^{(2)} = 1,\ k_2^{(2)} = 0,\ k_3^{(2)} = -2.$$

$$x_2 = e^{t},\ y_2 = 0,\ z_2 = -2e^{t}.$$

Третье решение таким способом получить не удастся.

Пример 41. (продолжение)

Будем искать решение в виде

$$x=(\alpha_1+\beta_1 t)e^t,\ \ y=(\alpha_2+\beta_2 t)e^t,\ \ z=(\alpha_3+\beta_3 t)e^t,$$

где α_i, β_i $i=1,2,3$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Продифференцируем x, y, z и подставим в систему дифференциальных уравнений. После сокращения на e^t, имеем

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 t+\beta_1=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2+\beta_2 t,\\ \alpha_2+\beta_2 t+\beta_2=4(\alpha_1+\beta_1 t)-\alpha_2-\beta_2 t+2(\alpha_3+\beta_3 t),\\ \alpha_3+\beta_3 t+\beta_3=2(\alpha_2+\beta_2 t)+\alpha_3+\beta_3 t.\end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t^0 и t^1, получим

$$\begin{array}{lll}\beta_1+\alpha_2=0, & -4\alpha_1+2\alpha_2+\beta_2-2\alpha_3=0, & \beta_3-2\alpha_2=0,\\ \beta_2=0, & -4\beta_1+2\beta_2-2\beta_3=0, & -2\beta_2=0.\end{array}$$

Пример 41. (продолжение)

Полагая $\alpha_1 = C_2,\ \alpha_2 = C_3,$ имеем

$$\beta_1 = -C_3,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 2C_3,\ \alpha_3 = -2C_2 + C_3.$$

Итак

$$\begin{aligned} x &= \left(C_2 - C_3 t\right)e^t, \\ y &= C_3 e^t, \\ z &= \left(-2C_2 + C_3 + 2C_3 t\right)e^t. \end{aligned}$$

Пример 41. (продолжение)

Решение с индексом 2 получается, если $C_2 = 1,\ C_3 = 0.$

Если положить $C_2 = 0,\ C_3 = 1,$ получим третье решение (с индексом 3)

$$x_3 = -te^t,\ \ y_3 = e^t,\ \ z_3 = (1 + 2t)e^t.$$

Три решения образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + (C_2 - C_3 t)e^t, \\ y &= 2C_1 e^{-t} + C_3 e^t, \\ z &= -C_1 e^{-t} + (-2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^t. \end{aligned}$$

Правило

Если характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений имеет корень r кратности m, то ему отвечает решение, зависящее от m произвольных постоянных

$$x_1 = P_1(t)e^{rt}, \dots, x_n = P_n(t)e^{rt},$$

где $P_i(t)$ - многочлены степени не выше $m-1$.

Подбор частного решения для системы неоднородных уравнений можно производить сведя систему к одному уравнению высшего порядка и используя методы, изложенные ранее.

12.5.4. Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n. \end{cases}$$

Введем обозначения:

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathrm{K} & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \mathrm{L} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Вектор неизвестных функций

$$X(t) = \big(x_1(t)\ \ldots\ x_n(t)\big)^{\mathrm{T}},$$

Вектор их производных

$$X'(t) = \big(x_1'(t)\ \ldots\ x_n'(t)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений можно представить в матричном виде

$$X' = AX.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$X = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n.$$

Частные решения находим в виде

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}.$$

Определение. Система векторных функций называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 X_1(t) + \ldots + \lambda_n X_n(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Это выполняется, если определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}(t) & \cdots & X_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

Для получения частного решения, сделаем подстановку Эйлера

$$X(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{rt} \\ \cdots \\ \cdots \\ k_ne^{rt} \end{pmatrix}=e^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X'(t)=re^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Подставим в систему дифференциальных уравнений вектор неизвестных функций и их производных

$$X(t),\quad X'(t).$$

Получим $$re^{rt}K = Ae^{rt}K,$$

где $$K = \left(k_1\ \ldots\ k_n\right)^{\text{т}}.$$

Тогда $$rK = AK \Rightarrow \left(A - rE\right)K = 0,$$

где: r - собственное число матрицы A,

K - собственный вектор матрицы A.

Вектор K имеет ненулевое решение, если определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений равен нулю.

$$\left|A - rE\right| = 0.$$

Получили характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & \mathrm{K} & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \mathrm{L} & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$