Лекция 8
12.5. Системы дифференциальных уравнений
12.5.1. Общие определения. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса. Например,

t - независимая переменная;

$x_1(t),\ldots,x_n(t)$ (или $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, если функций не больше трех) - неизвестные функции.

Определение. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.

Примеры.

1) $\begin{cases} x' = 2x + y + t + 1, \\ y' = 3x - 4y + 6t. \end{cases}$

$x,\ y$ - функции t.

2) $\begin{cases} t x_1'' + 3x_2' - 2x_1 x_3 = 0, \\ 2x_2'' + x_3'' - 2t x_1 = 0, \\ x_3' + 2x_1 + t x_2 = 0. \end{cases}$

$x_1,\ x_2,\ x_3$- функции t.

Решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, которая при подстановке в уравнения превращает их в тождества.

Определение. ***Нормальной системой дифференциальных уравнений*** называется система уравнений вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

Пример.

$$\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}\left(3x - 2y + 2t\right), \\ y' = \dfrac{1}{5}\left(x + y - t\right). \end{cases}$$

Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе. Их рассматривать не будем.

Пример.

$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

Пример 34.

$$\begin{cases} x_1'' + tx_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Введем дополнительные функции

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -tx_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пример 35. $x''' = f\left(t, x, x', x''\right).$

Решение. Введем

$$x' = y,\ \ x'' = y' = z,\ x''' = y'' = z'.$$

Тогда

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f\left(t, x, y, z\right). \end{cases}$$

Нормальная система дифференциальных уравнений, обычно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

Пример 36.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Решение. $x'' = y' = z, \;\; x''' = z' = x - y + z, \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow x''' = x - x' + x'' \Rightarrow x''' - x'' + x' - x = 0.$$

$$y = e^{rx}, \quad r^3 - r^2 + r - 1 = \left(r^2 + 1\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i, \;\; \alpha = 0, \;\; \beta = 1, \;\; s = 1. \qquad r_3 = 1, \;\; \alpha = 1, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1.$$

$$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$

$$y = x' \Rightarrow y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$$

$$z = y' \Rightarrow z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Обратный случай, когда система дифференциальных уравнений не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

Пример 37.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение не зависит от остальных.

$$x' = x, \;\; y'' = z' = y.$$

$$y'' - y = 0, \;\;\; y = e^{rx}, \;\;\; r^2 - 1 = 0, \;\;\; r_{1,2} = \pm 1.$$

$$x = C_3 e^t,$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$
$$z = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Теорема. Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$ имеет вид $$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, ..., C_n), \end{cases}$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные.

$C_1, ..., C_n$ могут входить не во все решения.

Задание начальных условий $x_1\big|_{t=t_0} = x_{10}, ...,\ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$ дает частное решение системы дифференциальных уравнений, при этом $C_1, ..., C_n$ находятся из системы

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, C_1, ..., C_n) = x_{10}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t_0, C_1, ..., C_n) = x_{n0}. \end{cases}$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений

$$t_0,\ x_{10},\ x_{20},\ldots,\ x_{n0},$$

то в достаточно малом интервале $\left[t_0 - h, t_0 + h\right]$ существует единственная система функций $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.

12.5.2. Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Определение. ***Линейной неоднородной*** называется нормальная система дифференциальных уравнений, в правой части которой неизвестные функции входят в степени не выше первой

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases}$$

где $a_{ij}(t),\ b_i(t)$ - непрерывные функции $\forall x \in \langle a,b \rangle$

Коэффициенты $b_i(t)$ называются свободными членами.

Системы линейных однородных дифференциальных уравнений

Определение. ***Однородной*** называется система линейных дифференциальных уравнений вида (в правой части нет свободных членов)

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i' = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{ij}(t)x_j + \ldots + a_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij}(t)$ - непрерывные функции $\forall x \in \langle a, b \rangle$

1). Если известно частное решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),...,x_{n1}(t)$, то $C_1 x_{11}(t),...,C_1 x_{n1}(t)$ тоже является решением системы, где C_1 - произвольная постоянная.

Здесь у функции $x_{ij}(t)$ индекс i - номер функции, j - номер решения для этой функции.

2) Если известны два частных решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),...,x_{n1}(t)$ и $x_{12}(t),...,x_{n2}(t)$, то $x_{11}(t)+x_{12}(t),...,x_{n1}(t)+x_{n2}(t)$ тоже является решением системы.

3) Если известны n частных решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$x_{11}(t),\dots,x_{n1}(t); \quad \dots; \quad x_{1n}(t),\dots,x_{nn}(t),$$

то

$$\begin{cases} x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12} + \dots + C_nx_{1n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \dots + C_nx_{nn} \end{cases} \qquad (*)$$

тоже является решением системы линейных дифференциальных уравнений (C_k - произвольные постоянные).

Совокупность n линейно независимых решений образует ***фундаментальную систему решений***.

Решение (*) является общим решением однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Общее решение ***неоднородной*** системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

При заданных начальных условиях

$$x_1\big|_{t=t_0} = x_{10},\ \ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$$

можно получить частное решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо подставить начальные условия в общее решение системы (*).

Получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 x_{110} + \ldots + C_n x_{n10} = x_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{1n0} + \ldots + C_n x_{nn0} = x_{n0}. \end{cases}$$

Решая систему, получим частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы система алгебраических уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы определитель

$$W = \begin{vmatrix} x_{110} & \cdots & x_{n10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n0} & \cdots & x_{nn0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

12.5.3. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad a_{ij} = const.$$

Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n - го порядка.

Будем искать частные решения в виде

$$x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt},$$

где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные.

Дифференцируя частные решения и подставляя частные решения и их производные в систему, получим

$$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - r) k_1 + \ldots + a_{1n} k_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} k_1 + \ldots + (a_{nn} - r) k_n = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - r) & \mathrm{K} & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \mathrm{L} & (a_{nn} - r) \end{vmatrix} = 0.$$

Получили характеристическое уравнение.

Раскроем определитель и найдем корни характеристического уравнения.

а) Предположим, что ***корни действительные и простые***. Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений. Пусть первый корень равен r_1. Тогда из (*)

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)k_1^{(1)}+a_{12}k_2^{(1)}+a_{13}k_3^{(1)}=0, \\ a_{21}k_1^{(1)}+(a_{22}-r_1)k_2^{(1)}+a_{23}k_3^{(1)}=0, \\ a_{31}k_1^{(1)}+a_{32}k_2^{(1)}+(a_{33}-r_1)k_3^{(1)}=0. \end{cases}$$

Здесь верхний индекс соответствует номеру корня.

Определитель системы равен нулю. Т.к. r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений следует из остальных.

Решение системы зависит от одной произвольной постоянной.

Пусть первые два уравнения линейно независимы. Тогда

$$\begin{cases}(a_{11}-r_1)k_1^{(1)}+a_{12}k_2^{(1)}=-a_{13}k_3^{(1)},\\ a_{21}k_1^{(1)}+(a_{22}-r_1)k_2^{(1)}=-a_{23}k_3^{(1)}.\end{cases}$$

Для нахождения решения применим формулу Крамера.

$$k_1^{(1)}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad k_2^{(1)}=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}-r_1 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-r_1\end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-a_{13}\cdot k_3^{(1)} & a_{12}\\ -a_{23}\cdot k_3^{(1)} & a_{22}-r_1\end{vmatrix}=k_3^{(1)}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22}-r_1 & a_{23}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}-r_1 & -a_{13}\cdot k_3^{(1)}\\ a_{21} & -a_{23}\cdot k_3^{(1)}\end{vmatrix}=k_3^{(1)}\cdot\begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}-r_1\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}.$$

Пусть

$$k_3^{(1)} = C_1 \cdot \Delta = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} - r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_1 \end{vmatrix},$$

где C_1 -произвольная постоянная.

Тогда

$$k_1^{(1)} = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - r_1 & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$k_2^{(1)} = C_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - r_1 \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную.

Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений:

1-ая система: $k_1^{(1)}e^{r_1 t},\ k_2^{(1)}e^{r_1 t},\ k_3^{(1)}e^{r_1 t};$

2-ая система: $k_1^{(2)}e^{r_2 t},\ k_2^{(2)}e^{r_2 t},\ k_3^{(2)}e^{r_2 t};$

3-ья система: $k_1^{(3)}e^{r_3 t},\ k_2^{(3)}e^{r_3 t},\ k_3^{(3)}e^{r_3 t}.$

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид (суммируем по столбцам члена предыдущей таблицы)

$$x_1 = C_1 k_1^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)}e^{r_3 t},$$
$$x_2 = C_1 k_2^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)}e^{r_3 t},$$
$$x_3 = C_1 k_3^{(1)}e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)}e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)}e^{r_3 t}.$$