Лекция 7

12.4.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (метод вариации произвольных постоянных)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Структура общего решения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Алгоритм решения сводится к решению трех задач:

1) находим общее решение однородного уравнения;
2) находим частное решение неоднородного уравнения;
3) суммируем эти решения.

Решение первой задачи изложено в пункте 12.4.1.

Для решения второй задачи применяем пункт 12.3.3.

Решение третьей задачи проводится путем суммирования решений двух предыдущих задач.

Пример 28. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Применим предложенный алгоритм.

Пример 28. (продолжение)

1) Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0.$

Корни характеристического $r_{1,2} = \pm i$ уравнения имеют характеристики $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $s = 1$ (одна пара мнимых корней).

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 28. (продолжение)

2) Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2,$$

где $y_1 = \cos x,\;\; y_2 = \sin x,$

т.е.

$$y_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Неизвестные функции $C_1(x),\; C_2(x)$ находятся из решения системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Пример 28. (продолжение)

До множим первое уравнение системы на $\cos x$, а второе на $\sin x$. Получим новую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos^2 x + C_2'(x)\sin x\cos x = 0, \\ -C_1'(x)\sin^2 x + C_2'(x)\cos x\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим первое дифференциальное уравнение для нахождения $C_1(x)$

$$C_1'(x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Подставим $C_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ в первое уравнение системы, получим второе дифференциальное уравнение для нахождения $C_2'(x)$

$$C_2'(x) = \sin x.$$

Пример 28. (продолжение)

Интегрируя, найдем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Тогда

$$y_{чн} = \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)\cos x - \cos x \sin x.$$

3) Ответ

$$y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)\cos x - \cos x \sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos x.$$

12.4.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

Правой частью специального вида называется выражение

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x\right)$$

где: $P_1(x)$ - многочлен степени p,

$P_2(x)$ - многочлен степени q.

Введем понятие ***характеристика правой части***:

α - коэффициент при x в экспоненте правой части;

β - коэффициент при x в тригонометрии правой части;

$l=\max(p,q)$;

k - кратность корня с характеристикой α,β среди корней характеристического уравнения $r=\alpha\pm\beta i.$

Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Нахождение $y_{оо}$ общего решения однородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами изложено в пункте 12.4.1.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью имеет вид

$$y_{чн} = x^k e^{\alpha x}\left(R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x\right),$$

где: $R_1(x)$, $R_2(x)$ - многочлены степени $l = \max(p, q)$;

k - кратность корня с характеристикой α, β среди корней характеристического уравнения (если такого корня нет, то $k = 0$).

Коэффициенты многочленов после подстановки искомой функции $y_{чн}$ и ее производных в дифференциальное уравнение находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов, т.е. приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x и при одинаковых гармониках.

Пример 29. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Характеристики корней уравнения

$$r_1 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \text{кратность корня}\ s = 1,$$
$$r_2 = 3,\ \alpha = 3,\ \beta = 0,\ \text{кратность корня}\ s = 1.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{оо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 29. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Правая часть уравнения $f(x) = 3e^{2x}$.

Характеристика правой части:

$\alpha = 2$ - коэффициент при x в экспоненте;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 0$ - в правой части многочлен нулевой степени;

$k = 0$ - среди корней характеристического уравнения нет корня с характеристикой $\alpha = 2,\ \beta = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = Ae^{2x},$$

причем

$$y'_{чн} = 2Ae^{2x},\ y''_{чн} = 4Ae^{2x}.$$

Пример 29. (продолжение)

Подставим искомую функцию $y_{чн}$ и ее производные в дифференциальное уравнение, получим равенство

$$4Ae^{2x}-8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=3e^{2x}.$$

После сокращения равенства на e^{2x}, имеем $A=-3$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения равно

$$y_{чн}=-3e^{2x}.$$

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}-3e^{2x}.$$

Пример 30. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + y = x + 1, \;\; y\big|_{x=0} = 2, \;\; y'\big|_{x=0} = -3.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $\quad y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\quad r^2 - 2r + 1 = 0.$

Корень уравнения $r_{1,2} = 1$ имеет характеристику:

$\alpha = 1, \beta = 0,$ кратность корня $s = 2.$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{оо} = \left(C_1 + C_2 x\right) e^x.$$

Пример 30. (продолжение)

2) Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = x + 1.$$

Характеристика правой части:

$\alpha = 0$ - в правой части нет экспоненты;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 0$ - т.к. среди корней характеристического уравнения нет нулевого корня.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = A + Bx,$$

причем

$$y'_{чн} = B, \;\; y''_{чн} = 0.$$

Пример 30. (продолжение)

Подставим в неизвестную функцию $y_{чн}$ и ее производные в дифференциальное уравнение. Имеем

$$-2B + A + Bx = x + 1.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} -2B + A = 1, \\ B = 1. \qquad\qquad A = 3. \end{array}\right. \\ x^1 & \end{array}$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = 3 + x.$$

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 3 + x.$$

Пример 30. (продолжение)

4) Решим задачу Коши.

Найдем производную

$$y'_{он} = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x) e^x + 1.$$

Подставим начальные условия в выражения для $y_{он}$ и $y'_{он}$.

Получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_2 + C_1 + 1. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$C_1 = -1,\ C_2 = -3.$$

Ответ $$y = -(1 + 3x) e^x + 3 + x.$$

Пример 31. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + u_{чн}$.

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Характеристики корней уравнения $r_1 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$

$$r_2 = 3,\ \alpha = 3,\ \beta = 0,\ s = 1.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Пример 31. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^{x}$.

Правая часть уравнения $f\left(x\right) = xe^{x}$. Характеристика правой части:

$\alpha = 1$ - коэффициент при x в экспоненте;

$\beta = 0$ - в правой части нет синусов и косинусов;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 1$ - среди корней характеристического уравнения есть корень с характеристикой $\alpha = 1,\ \beta = 0$ кратности $s = 1$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = x\left(Ax + B\right)e^{x} = \left(Ax^{2} + Bx\right)e^{x},$$

причем

$$y'_{чн} = \left(2Ax + B\right)e^{x} + \left(Ax^{2} + Bx\right)e^{x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{x} + 2\left(2Ax + B\right)e^{x} + \left(Ax^{2} + Bx\right)e^{x}.$$

Пример 31. (продолжение)

Подставим в неизвестную функцию $y_{чн}$ и ее производные в дифференциальное уравнение. Имеем

$$2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x -$$

$$-4\left((2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x\right) + 3\left(Ax^2 + Bx\right)e^x =$$

$$= e^x(-4Ax + 2A - 2B) = xe^x.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{l|} x^0 \\ x^1 \end{array} \begin{cases} 2A - 2B = 0, \\ -4A = 1. \end{cases} \qquad A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = -\frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^x.$$

Пример 31. (продолжение)

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^x.$$

Пример 32. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x.$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + y_{чн}.$

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0.$

Характеристика корней уравнения

$r_{1,2} = -2 \pm 3i,\ \ \alpha = -2,\ \ \beta = 3,\ \ s = 1$ (одна пара корней).

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Пример 32. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x.$

Правая часть уравнения $f\left(x\right)=5\sin 2x.$

Характеристика правой части:

$\alpha=0$ - в правой части экспонента отсутствует;

$\beta=2$ - коэффициент при x в синусе;

$l=0$ - в правой части многочлен нулевой степени;

$k=0$ - среди корней характеристического уравнения нет корней с характеристикой $\alpha=0,\ \beta=2.$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Пример 32. (продолжение)

Найдем производные $y_{чн}$

$$y'_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad y''_{чн} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставим саму функцию и ее производные в неоднородное дифференциальное уравнение. Имеем

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) +$$

$$+13\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = 5\sin 2x.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{l|l} \sin 2x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0. \end{cases}$} \\ \cos 2x & \end{array} \qquad A = -\frac{8}{29}, \;\; B = \frac{9}{29}.$$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Пример 32. (продолжение)

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Пример 33. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 4x\sin x.$

Решение. Данное уравнение есть линейное неоднородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Структура общего решения $y = y_{oo} + u_{чн}.$

1) Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0.$

Характеристика корней уравнения

$$r_{1,2} = \pm i,\ \ \alpha = 0,\ \ \beta = 1,\ \ s = 1\ \ \text{(одна пара корней)}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 33. (продолжение)

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + y = 4x\sin x.$

Правая часть уравнения $f(x) = 4x\sin x.$

Характеристика правой части:

$\alpha = 0$ - в правой части нет экспоненты;

$\beta = 1$ - коэффициент при x в синусе;

$l = 1$ - в правой части многочлен первой степени;

$k = 1$ - среди корней характеристического уравнения есть корень с характеристикой $\alpha = 0,$ $\beta = 1$ кратности $s = 1.$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = x\left(\left(Ax + B\right)\cos x + \left(Cx + D\right)\sin x\right).$$

Пример 33. (продолжение)

Найдем вторую производную функции $y_{чн}$

$$y''_{чн} = \left(-Ax^2 + \left(4C - B\right)x + \left(2A + 2D\right)\right)\cos x +$$

$$+\left(-Cx^2 - \left(4A + D\right)x + \left(2C - 2B\right)\right)\sin x.$$

и подставим саму функцию и ее производную в неоднородное дифференциальное уравнение. Имеем

$$\left(2Cx + \left(A + D\right)\right)\cos x + \left(-2Ax + \left(C - B\right)\right)\sin x = 2x\sin x.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим:

$2C = 0,\ A + D = 0,\ -2A = 2,\ C = B = 0.$ $A = -1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1.$

Получили частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{чн} = x\left(\sin x - x\cos x\right).$$

3) Общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\left(\sin x - x\cos x\right).$