Лекция 6
12.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков
12.3.1. Общие определения

Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением высшего порядка*** называется дифференциальное уравнение высшего порядка 1-й степени относительно неизвестной функции и ее производных

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x), \qquad (*)$$

где: $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x),\ a_n(x),\ f(x)$ - непрерывные функции для всех $x \in \langle a, b \rangle$.

Функция $f(x)$ называется правой частью дифференциального уравнения.

Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Если $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad f(x),\ a_1(x),\ a_2(x), \ldots, a_n(x)$ непрерывны, то

$$\forall y(x_0) = y_0,\ \forall y'(x_0) = y'_0, \ldots, \forall y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$$

существует $y = y(x),$ единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

можно привести к виду (*), разделив на $a_0(x)$.

Там, где $a_0(x)=0$ - особые точки.

12.3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка (без правой части)

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0. \qquad (**)$$

Считаем, что $a_1(x),\ a_2(x),\ldots,a_n(x)$ непрерывны для всех $x\in\langle a,b\rangle$.

Тривиальное решение $y\equiv 0.$

Теорема. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения (**), то их линейная комбинация $y=C_1y_1(x)+C_2\,y_2(x)$ также является решением уравнения (**) для любых $C_1,\ C_2$.

Теорема. (продолжение)

Доказательство. $y = C_1 y_1 + C_2\, y_2, \qquad y' = C_1 y_1' + C_2\, y_2',$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2\, y_2'', \ldots, y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2\, y_2^{(n)}.$$

Подставим в уравнение

$$C_1 y_1^{(n)} + C_2\, y_2^{(n)} + \ldots + a_1 \left(C_1 y_1' + C_2\, y_2' \right) + a_2 \left(C_1 y_1 + C_2\, y_2 \right) =$$
$$= C_1 \left(y_1^{(n)} + \ldots + a_1 y_1' + a_2 y_1 \right) + C_2 \left(y_2^{(n)} + \ldots + a_1 y_2' + a_2 y_2 \right) \equiv 0,$$

т.к. выражения в скобках тождественно равны 0.

Линейно независимые системы функций

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$. Линейной комбинацией их будет $C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,\ldots,C_n$ - постоянные.

Определение. Система функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ называется ***линейно независимой***, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Т.е. не может быть равенства вида $\varphi_1(x)=C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$.

В частности, $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ линейно независимы, если

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\neq const.$$

Если $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

Пример 23. Показать, что функции

$$\varphi_1(x)=x,\;\; \varphi_2(x)=x^2,\;\; \varphi_3(x)=x^3,\;\; \varphi_4(x)=2x-x^2$$

линейно зависимы.

Решение. Подберем коэффициенты C_k так, чтобы одна из функций выразилась через линейную комбинацию остальных

$$\varphi_4(x)=2\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+0\cdot\varphi_3(x).$$

Значит, функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_4(x)$ линейно зависимы.

Теорема. Если $y_1,\ldots,y_n$ суть n частных линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (**), то общим решением этого уравнения будет

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

Без доказательства.

Если $y_1,\ldots,y_n$ - линейно зависимые решения, то, по крайней мере, одно из них выразится через остальные $(n-1)$ и линейная комбинация из линейно независимых решений будет включать не n, а $(n-1)$ произвольных постоянных. Это не даст общего решения дифференциального уравнения.

Условие линейной независимости частных решений дифференциального уравнения – неравенство нулю определителя Вронского (вронскиана)

$$W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Линейно независимые решения $y_1, \ldots, y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка образуют ***фундаментальную систему решений***.

Если заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то, чтобы из общего решения $y_{\text{oo}} = C_1 y_1 + ... + C_n y_n$ получить частное решение, надо решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + ... + C_n y_{n0} = y_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Здесь определитель системы есть $W(y_1, y_2, ..., y_n) = W_0 \neq 0.$

Нулевым начальным условиям соответствует

$C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$ и $y \equiv 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$

12.3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка (с правой частью). Метод вариации произвольных постоянных

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (*) есть сумма общего решения $y_{oo}(x)$ однородного уравнения (**) и частного решения $y_{чн}(x)$ неоднородного уравнения (*)

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн}.$$

Теорема. (продолжение)

Доказательство. Т.к. $y'_{он} = y'_{оо} + y'_{чн}, ..., y_{он}^{(n)} = y_{оо}^{(n)} + y_{он}^{(n)}$, то, подстановкой в (*), имеем

$$y_{оо}^{(n)} + y_{чн}^{(n)} + ... + a_{n-1}\left(y'_{оо} + y'_{чн}\right) + a_n\left(y_{оо} + y_{чн}\right) =$$

$$= \left(y_{оо}^{(n)} + ... + a_{n-1}y'_{оо} + a_n y_{оо}\right) + \left(y_{чн}^{(n)} + ... + a_{n-1}y'_{чн} + a_n y_{чн}\right) \equiv f(x).$$

Т.к.

$$\left(y_{оо}^{(n)} + ... + a_{n-1}y'_{оо} + a_n y_{оо}\right) \equiv 0,$$

$$\left(y_{чн}^{(n)} + ... + a_{n-1}y'_{чн} + a_n y_{чн}\right) \equiv f(x).$$

Из этой теоремы следует, что

$$y_{он} = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x) + y_{чн}(x).$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Теорема. Если $y_1,\ldots,y_n$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,$$

то частным решением неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ является функция $y_{чн}=C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n$, где функции $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1+\ldots+C_n'y_n=0, \\ C_1'y_1'+\ldots+C_n'y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

Определитель $W(y_1,\ldots,y_n)$ системы есть определитель Вронского.

12.4. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

12.4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Применим подстановку Эйлера. Ищем решение в виде

$$y = e^{rx},$$

где r - действительное или комплексное число.

$$y' = re^{rx}, \ \ y'' = r^2 e^{rx}, \ldots, \ \ y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Подставим $y, y', \ldots, y^{(n)}$ в дифференциальное уравнение, получим

$$e^{rx}\left(r^n + a_1 r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right) = 0, \ \ e^{rx} \neq 0.$$

Получили ***характеристическое уравнение***

$$r^n + a_1 r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Здесь $y^{(k)}$ (k -ой производной функции y) дифференциального уравнения, соответствует r^k характеристического уравнения.

Решая характеристическое уравнение, находим его корни. В общем случае комплексно-сопряженный корень $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s.

Характеристика данного корня:

действительная часть корня α,

мнимая часть корня β,

кратность корня s.

Согласно основной теоремы алгебры, уравнение n -ой имеет n корней действительных и комплексно-сопряженных, простых и кратных.

1) Каждому действительному корню $r=\alpha$ кратности s соответствует s решений

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\dots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}.$$

2) Каждой паре комплексно сопряженных корней $r=\alpha\pm\beta i$ кратности s соответствует $2s$ решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Общее число кратности корней равно n, поэтому решений будет n.

$$s_1 + s_2 + \ldots + 2s_{m+1} + 2s_{m+2} + \ldots = n,$$

где $s_1, s_2, \ldots$ -кратность действительных корней,

s_{m+1}, $s_{m+2}, \ldots$ -кратность комплексных корней.

Общая формула: каждой паре комплексно-сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s, (характеристика корня α, β, s) соответствует часть общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\Big(\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right)\cos\beta x +$$

$$+\left(C_{s+1} + C_{s+2} x + \ldots + C_{2s} x^{s-1}\right)\sin\beta x\Big).$$

Частный случай: действительный корень $r = \alpha$ кратности s. В этом случае $\beta = 0$ (характеристика корня $\alpha, \ \beta = 0, s$). Тогда $\sin\beta x = 0, \quad \cos\beta x = 1$ и формула приобретает вид

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right).$$

Пример 24. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - 6r + 9 = 0.$

Корень характеристического уравнения $r_{1,2} = 3.$

Характеристика корня:

$$\alpha = 3,\ \beta = 0,\ s = 2.$$

Ответ

$$y = e^{3x} \cdot \left(C_1 + C_2 x\right).$$

Пример 25. Решите задачу Коши.

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y\big|_{x_0=0} = 2, \;\; y'\big|_{x_0=0} = -5.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - r - 2 = 0.$

Корни характеристического уравнения $r_1 = 2, \;\; r_2 = -1.$

Характеристики корней: $r_1 = 2, \;\; \alpha = 2, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1;$

$$r_2 = -1, \;\; \alpha = -1, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1;$$

Общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \qquad y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}.$

Из начальных условий $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5, \end{cases} \quad C_1 = -1, \;\; C_2 = 3.$

Ответ: частное решение дифференциального уравнения

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

Пример 26. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 13 = 0.$

Корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Характеристика корней:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad s = 1 \text{ (одна пара корней).}$$

Ответ

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Пример 27. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное пятого порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$

Корни характеристического уравнения имеют характеристики

$$r_1 = -1,\ \alpha = -1,\ \beta = 0,\ s = 1,$$

$$r_{2,3,4,5} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 2$$ (две пары мнимых корней).

Ответ

$$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$