Лекция 5
12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков
12.2.1. Общие определения

Определение. ***Порядком*** дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной функции, входящей в уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной $y^{(n)}$ имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Лемма. Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

имеет бесконечное множество решений, определяемых формулой $$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right),$$

содержащей n произвольных постоянных. Это множество решений называется ***общим решением***.

Частные решения дифференциального уравнения n-го порядка определяются из начальных условий

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ y'\left(x_0\right) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)},$$

где: $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ - заданные начальные значения.

Пример 19. Решить задачу Коши

$$y'' = x, \qquad y\big|_{x=2} = 2,\ \ y'\big|_{x=2} = 3.$$

Решение. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение второго порядка. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,\ \ y = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Подставим начальные условия в y и y'. Получим

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \qquad \text{Откуда} \quad C_1 = 1,\ \ C_2 = -\frac{4}{3}.$$

Частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, $y = \dfrac{x^3}{6} + x - \dfrac{4}{3}.$

Теорема о существовании и единственности решения

Если функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ и ее производные

$\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \ldots., \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в окрестности значений $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

в достаточно малом интервале $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \dfrac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$ имеет единственное решение. Если задать начальные условия при $x_0 = 0,$ то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

12.2.2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x).$

Дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием. $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

Обозначим $f_n(x) = \int\int\ldots\int f(x)\,dx^n,$ тогда

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример 20. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = xe^{-x}.$$

Решение. Данное уравнение второго порядка допускающее понижение порядка, которое решается последовательным интегрированием

$$y' = \int xe^{-x}dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right)dx + C_2 = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Ответ

$$y = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

2) Уравнения вида

$$F\left(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

не содержат явно $y, y', \dots, y^{(k-1)}$.

Подстановка $y^{(k)} = z(x)$ понижает порядок уравнения на k :

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Пример 21. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка, допускающее понижение порядка - оно не содержит явно y.

Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$ понижает порядок на единицу.

Имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

Его решение

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

После обратной подстановки

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \;\; y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Уравнения вида $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$
не содержат явно x.

Подстановка $y' = z\left(y\right)$ понижает порядок уравнения на единицу

$$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dz}{dy}y'\frac{dz}{dy} + z\frac{d^2z}{dy^2}y' = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right]$$

и т. д.

Пример 22. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$1+y'^2=y\cdot y''.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка, допускающее понижение порядка, ибо не содержит явно x.

Сделаем замену $y'=z\left(y\right),\ \ y''=z\dfrac{dz}{dy}.$

Тогда

$$1+z^2=yz\frac{dz}{dy}.$$

Это дифференциальное с разделяющимися переменными.

Разделим переменные

$$\frac{zdz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln\left(1+z^2\right)=2\ln\left|y\right|+2\ln\left|C_1\right| \qquad \text{или} \qquad 1+z^2=C_1^2y^2.$$

Пример 22. (продолжение)

Разрешим данное уравнение относительно z

$$z = y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right| = \pm\left(x + C_2\right).$$