Лекция 4

12.1.8. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Если левая часть уравнения

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Это выполняется, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

$$du(x,y) = 0, \quad u(x,y) = C,$$

Общий интеграл уравнения

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C \qquad \text{(А)}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C. \qquad \text{(Б)}$$

Возможны два варианта решения.

Пример 16. $\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=0.$

Решение. $P\left(x,y\right)=e^{x}+y+\sin y,\ Q\left(x,y\right)=e^{y}+x+x\cos y.$

Проверка: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Данное уравнение есть дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Исходим из определения полного дифференциала.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\left(x,y\right).$$

Следовательно

$$u=\int\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+C\left(y\right)=e^{x}+xy+x\sin y+C\left(y\right).$$

Пример 16. (продолжение)

Но

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y) = Q(x, y) = x + x\cos y + e^{y}.$$

Получили дифференциальное уравнение для определения $C(y)$.

$$C'(y) = e^{y},\ C(y) = e^{y} - \mathrm{C}_1.$$

Решение дифференциального уравнения

$$e^{x} + xy + x\sin y + e^{y} = C_1.$$

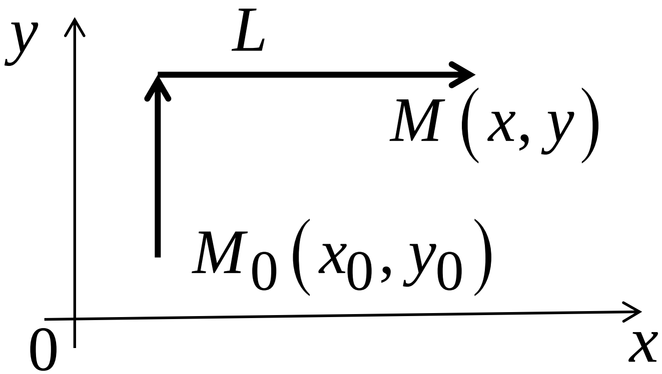
Пример 17. $\left(x+y-1\right)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0.$

Решение. $P\left(x,y\right)=x+y-1,\qquad Q\left(x,y\right)=e^{y}+x,$

Проверка: $$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Данное уравнение есть дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Применим формулу (A)

Найдем криволинейный интеграл второго рода по ломаной L.



$$u\left(x,y\right)=\int\limits_{M_0}^{M}P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P\left(x,y\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)dy=C.$$

Пример 17. (продолжение)

Примем $x_0 = y_0 = 0.$

Тогда

$$u(x,y) = \int_0^x (x + y - 1)\,dx + \int_0^y e^y dy =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + yx - x \right)\Bigg|_o^x + e^y \Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + yx - x + e^y - 1 = C.$$

Ответ

$$\frac{x^2}{2} + yx - x + e^y = C.$$

Интегрирующий множитель

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вводят интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x, y)$$

такой, чтобы уравнение

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y)\,dx + \mu(x, y) \cdot Q(x, y)\,dy = 0$$

было уравнением в полных дифференциалах.

Тогда $\dfrac{\partial \mu P}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu Q}{\partial x}$.

1) Если $\mu = \mu(x)$, то $\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx}$.

2) Если $\mu = \mu(y)$, то $\mu = e^{-\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{P} dy}$.

Пример 18. $\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + \left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0.$

Решение. $P\left(x, y\right) = x\sin y + y\cos y, \quad Q\left(x, y\right) = x\cos y - y\sin y.$

Проверка: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y, \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \cos y. \ \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Применим первую формулу для вычисления интегрирующего множителя. Вычисляем

$$\frac{\left(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x\right)}{Q} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

$$\mu = e^{\int \frac{\left(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x\right)}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^{x}.$$

Интегрирующий множитель зависит только от переменной *x*, следовательно формула применена правильно.

Пример 18. (продолжение)

После умножения данного уравнения на интегрирующий множитель $\mu = e^x$ имеем

$$e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0.$$

$P_1(x,y) = e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)$, $Q_1(x,y) = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)$,

Проверка:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = e^x\left(x\cos y + \cos y - y\sin y\right),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Данное уравнение есть дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Пример 18. (продолжение)

Первый вариант решения

$$e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right),$$

$$u=\int e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+C\left(x\right)=$$

$$=xe^x\sin y+ye^x\cos y-e^x\sin y+C\left(x\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y+xe^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y+C'\left(x\right)=$$

$$=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right),$$

$$C'\left(x\right)=0,\ \ C=\mathrm{const}.$$

$$u=xe^x\sin y+ye^x\cos y-e^x\sin y=C.$$

Пример 18. (продолжение)

Второй вариант решения. Примем $x_0 = y_0 = 0.$

$$e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0.$$

По формуле (Б, слайд 2) имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x} P_1\left(x, y_0\right)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q_1\left(x, y\right)dy = C.$$

т.е.

$$u\left(x, y\right) = \int\limits_{0}^{y} e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)dy =$$

$$= xe^x\sin y + ye^x\cos y - e^x\sin y = C.$$

Окончательно

$$xe^x\sin y + ye^x\cos y - e^x\sin y = C.$$