Лекция 3

12.1.5. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $aB - bA \neq 0,$ производят замену переменных

$$\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0,$$

где x_0, y_0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ Ax+By+C=0, \end{cases} \qquad x_0 = -\frac{cB-bC}{aB-bA}, \quad y_0 = -\frac{aC-cA}{aB-bA}.$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению относительно переменных $\bar{x}, \bar{y}$.

2) Если $aB - bA = 0,$ производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = ax + by. \end{cases}$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно переменных $\overline{x},\ \overline{y}.$

Пример 12.

$$y' = \frac{-7x+3y-2}{-3x+4y-5}.$$

Решение. $aB-bA=\left(-7\right)\cdot 4-3\cdot\left(-3\right)=-19\neq 0$ - первый случай.

$$x_0=\frac{-8+15}{19}=\frac{7}{19},\ \ y_0=\frac{35-6}{19}=\frac{29}{19}.\ \ \begin{cases}\overline{x}=x-\dfrac{7}{19},\\ \overline{y}=y-\dfrac{29}{19},\end{cases}\ \ \begin{cases}x=\overline{x}+\dfrac{7}{19},\\ y=\overline{y}+\dfrac{29}{19}.\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}=\frac{-7\overline{x}+3\overline{y}-\dfrac{7\cdot 7}{19}+\dfrac{3\cdot 29}{19}-2}{-3\overline{x}+4\overline{y}-\dfrac{3\cdot 7}{19}+\dfrac{4\cdot 29}{19}-5}=\frac{-7\overline{x}+3\overline{y}}{-3\overline{x}+4\overline{y}},\quad \overline{y}'=\frac{-7\overline{x}+3\overline{y}}{-3\overline{x}+4\overline{y}}.$$

Дифференциальное уравнение свелось к однородному дифференциальному уравнению первого порядка, т.к. правая часть однородная функция нулевого измерения.

Пример 13. Найти общее решение дифференциального уравнения. $y' = \dfrac{-x+y-2}{x-y}.$

Решение. $aB - bA = -1(-1) - 1\cdot 1 = 0$ - второй случай.

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = -x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{x}, \\ y = \bar{y} + \bar{x}, \end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\bar{y} + \bar{x}\right)}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + 1 = \bar{y}' + 1.$$

Дифференциальное уравнение примет вид

$$\bar{y}' + 1 = \frac{\bar{y} - 2}{-\bar{y}} = \frac{2}{\bar{y}} - 1 \quad \text{или} \quad \bar{y}' = \frac{2}{\bar{y}} - 2.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{-\bar{y}d\bar{y}}{1-\bar{y}} = -2\int dx + C, \qquad \int \frac{\left(1-\bar{y}-1\right)d\bar{y}}{1-\bar{y}} = -2x + C,$$

$$\bar{y} + \ln\left|1 - \bar{y}\right| = -2x + C, \qquad y + \ln\left|1 + x - y\right| = -x + C.$$

Окончательно $\quad y + \ln\left|1 + x - y\right| = -x + C.$

12.1.6. Линейные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, называется ***линейным*** (неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно) ***неоднородным*** (в правой части содержится функция, зависящая от независимой переменной x) ***дифференциальным уравнением***.

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: ***метод Лагранжа*** (метод вариации произвольной постоянной) и ***метод Бернулли*** (метод замены переменной).

Оба метода сводят решение данного дифференциального уравнения к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Рассмотрим ***линейное однородное дифференциальное уравнение*** (правая часть тождественно равна нулю)

$$y' + p(x)y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \qquad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Общее решение уравнения $\quad y = Ce^{-\int p(x)dx}.$

Пусть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией $C = C(x)$,

т.е.

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Найдем производную $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$

и подставим в исходное уравнение y и y'.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Здесь ***контрольная точка*** (второе и третье слагаемые должны сократиться). Тогда

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \qquad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Общее решение

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

где C_1 - произвольная постоянная.

Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right).$$

Метод Бернулли (метод замены переменной)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение y и y'. Получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x).$$

Потребуем, чтобы функция v была такой, чтобы выражение

$$\big(v' + p(x)v\big)$$

тождественно равнялось нулю.

Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными

$$v' + p(x)v = 0 \quad \text{и} \quad u'v = q(x).$$

Решим их последовательно.

1) $$v' + p(x)v = 0, \qquad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\,dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)\,dx, \qquad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

2) $$u'v = q(x), \qquad u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx, \qquad u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

Итак, $$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Такое же решение получено методом Лагранжа.

12.1.7. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$
$$m \neq 0,\ \ m \neq 1.$$

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: метод Лагранжа и метод Бернулли.

Оба метода сводят решение уравнения Бернулли к решению двух дифференциальных с разделяющимися переменными.

Пример 14. Решить задачу Коши

$$3(xy' + y) = xy^2,\ \ m = 2,\ \ y(1) = 3.$$

Пример 14. (продолжение)

Решение. Данное уравнение есть уравнение Бернулли.

Используем метод Лагранжа: $xy' + y = 0.$

$$x\frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C, \qquad y = \frac{C}{x}.$$

Пусть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией переменной x, т.е.

$$y = \frac{C(x)}{x}, \;\; y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Пример 14. (продолжение)

Подставим y и y' в дифференциальное уравнение:

Тогда

$$3\left(x\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}\right)=x\frac{C^2(x)}{x^2},$$

Контрольная точка: Второе и третье слагаемые должны сократиться

$$3C'(x)=\frac{C^2(x)}{x}.$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными

$$3\int\frac{dC(x)}{C^2(x)}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1,\ -3\frac{1}{C(x)}=\ln|C_1x|.\quad C(x)=-\frac{3}{\ln|C_1x|}.$$

Пример 14. (продолжение)

Тогда
$$y=-\frac{3}{x\ln\left|C_1x\right|}.$$

Решим задачу Коши

$$3=-\frac{3}{\ln\left|C_1\right|},\ \ \ln\left|C_1\right|=-1,$$

$$C_1=e^{-1}.$$

Ответ
$$y=-\frac{3}{x\left(\ln\left|x\right|-1\right)}.$$

Пример 15. Решить задачу Коши

$$3\left(xy' + y\right) = xy^2, \ m = 2, \ y\left(1\right) = 3.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение есть уравнение Бернулли. Используем метод Бернулли.

Сделаем подстановку $y = uv, \ y' = u'v + uv'.$

$$3xu'v + 3xuv' + 3uv = xu^2v^2, \ 3xu'v + 3u\left(xv' + v\right) = xu^2v^2.$$

а) Потребуем, чтобы $xv' + v = 0.$

Данное дифференциальное уравнение есть

дифференциальное уравнение с разделяющимися

переменными

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \ \ln\left|v\right| = -\ln\left|x\right|, \ v = \frac{1}{x}.$$

Пример 15. (продолжение)

б) $$3xu'v = xu^2v^2, \quad 3xu'\frac{1}{x} = xu^2\frac{1}{x^2}, \qquad 3u' = \frac{u^2}{x}.$$

Данное дифференциальное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные $3\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$

и проинтегрируем $$3\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{dx}{x} + \ln C, \qquad -3\frac{1}{u} = \ln|Cx|,$$

$$u = -\frac{3}{\ln|Cx|}.$$

Подставим v и u в общее решение дифференциального уравнения. Получим

$$y = -\frac{3}{x\ln|Cx|}.$$

Пример 15. (продолжение)

Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения

$$3 = -\frac{3}{\ln|C|}, \quad \ln|C| = -1, \qquad C = e^{-1}.$$

Ответ

$$y = -\frac{3}{x\left(\ln|x| - 1\right)}.$$