Лекция 2
12.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Проинтегрировав, получим $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$

Если $y(x_0) = y_0,$ то $\int\limits_{y_0}^{y} f(y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx.$

Пример.

$$3y^2 dy = 2x\,dx, \quad y^3 = x^2 + C, \quad y = \sqrt[3]{x^2 + C}.$$

Определение. Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}, \qquad P(x)Q(y)dy+M(x)N(y)dx=0,$$

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C. \qquad \int\frac{Q(y)}{N(y)}dy+\int\frac{M(x)}{P(x)}dx=C.$$

Внимание! Может произойти потеря частного решения.

Внимание! Решение любых дифференциальных уравнений первого порядка сводится к решению уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\left(y+1\right)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$P\left(x\right)Q\left(y\right)dy+M\left(x\right)N\left(y\right)dx=0,$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{y}{y+1}dy=0,\quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln\left|y+1\right|=\ln C,\qquad \frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Потеряли частное решение $y=-1.$

12.1.3. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1. Радиоактивный распад. Экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. В момент $t_0 = 0$

$$M = M_0. \quad \frac{dM}{dt} = -kM \ \left(k > 0\right), \quad \frac{dM}{M} = -kdt, \ \ln M = -kt + \ln C,$$

$$M = Ce^{-kt}, \quad M\left(0\right) = M_0 \to C = M_0, \qquad M = M_0 e^{-kt}.$$

Период полураспада T. Тогда $\dfrac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \to e^{kT} = 2.$

Следовательно

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

k - определяется экспериментально.

2. Охлаждение тела. Гипотеза Ньютона: скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела T и температурой окружающей среды T_c.

$$T_c = const, \qquad T(0) = T_0.$$

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_c\right), \ (k > 0), \qquad \frac{dT}{T - T_c} = -kdt,$$

$$\ln\left(T - T_c\right) = -kt + \ln C, \ \left(T > T_c\right), \qquad T = T_c + Ce^{-kt},$$

$$T(0) = T_0 \to T_0 = T_c + C \to C = T_0 - T_c.$$

Окончательно

$$T = T_c + \left(T_0 - T_c\right)e^{-kt}.$$

12.1.4. Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если функция $f(x, y)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 7. $$\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией измерения*** m, если $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$.

Пример 8. $$f(x,y)=x+3y$$

Решение. $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+3\lambda y=\lambda(x+3y)=\lambda f(x,y).$

Однородная функция первого измерения.

Пример 9. $$f(x,y)=x^2+4xy+5y^2$$

Решение.

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+4\lambda x\cdot\lambda y+5(\lambda y)^2$$

$$=\lambda^2\left(x^2+4xy+5y^2\right)=\lambda^2 f(x,y).$$

Однородная функция второго измерения.

Пример 10. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+7xy}$

Решение. $$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2+7\lambda x\cdot\lambda y}=$$

$$=\frac{\lambda^2}{\lambda^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+7xy}=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y).$$

Однородная функция нулевого измерения (просто однородная функция).

Пример приведения функции

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{y^2+xy}=\frac{1-(y/x)^2}{(y/x)^2+y/x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ однородная функция нулевого измерения, есть однородное дифференциальное уравнение и его можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными.

Введем вспомогательную функцию $t = y / x$ или $y = tx$.

$$y' = t'x + t.$$

Тогда $t'x + t = \varphi(t)$, $t'x = \varphi(t) - t$, $\dfrac{dt}{\varphi(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$$

Вычислив интеграл и перейдя к $y = tx$, получим

$$F(x, y) = \ln|x| + C.$$

Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0$. Если $\varphi(t) - t \equiv 0$, то

$$t' = 0, \quad t = C, \quad \frac{y}{x} - C, \quad y = Cx.$$

Пример 11. $$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Решение. Правая часть уравнения $f(x,y) = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 - 2\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{xy - y^2}{x^2 - xy} = \lambda^0 \cdot f(x,y),$$

есть однородная функция нулевого измерения. Значит данное уравнение есть однородное уравнение. Применим подстановку $y = tx$,

$$y' = t'x + t, \quad t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t\right) = \frac{1}{x}\frac{t^2}{1 - 2t}.$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 11. (продолжение)

Разделим переменные $$\frac{1-2t}{t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим
$$\frac{1}{t}+2\ln|t|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

или $$\ln\left|e^{1/t}t^2\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\to e^{1/t}t^2=\frac{C}{x}.$$

Окончательно $$\frac{y^2}{x}e^{x/y}=C.$$