ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Бутырин В.И., к.т.н., доцент;

Гобыш А.В., к.ф.м.н., доцент;

Шварц Э.Б., доцент

Лекция 1

12. Обыкновенные дифференциальные уравнения

12.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

12.1.1. Общие понятия. Теорема существования

Определение. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** (далее, ***дифференциальным уравнением***) ***1-го порядка*** называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию y и ее производную y'.

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$, $\quad y' = f(x, y)$ или $\quad f(x, y)dy = g(x, y)dx$.

Определение. ***Решением дифференциального уравнения 1-го порядка*** называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает его в тождество.

Примеры.

- Простейшие дифференциальные уравнения:

$$y' = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x)dx.$$

Решение $y = \int f(x)dx + C$, т.к.

$$y' = \left(\int f(x)dx + C\right)' = f(x) \text{ и } f(x) \equiv f(x).$$

- Более сложные дифференциальные уравнения:

$$y' + x^2 y = 0, \quad xy' - y^2 = 0, \quad xy' = y + x \quad \text{и т.д.}$$

или

$$dy + x^2 ydx = 0, \quad xdy - ydx = 0, \quad xdy = \left(e^y + x\right)dx \quad \text{и т.д.}$$

Пример 1. Найдите решение дифференциального уравнения

$$y' = y.$$

Общее решение $y = Ce^{y}$,

где C - произвольная постоянная.

Пример 2. Найдите решение дифференциального уравнения

$$y' = -y.$$

Общее решение $y = Ce^{-y}$,

где C - произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y).$$

имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную. Такое множество решений называют ***общим решением*** дифференциального уравнения. Придавая C определенные (допустимые) значения, получим ***частные решения***.

Общее решение дифференциального уравнения может быть получено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$. В этом случае оно называется ***общим интегралом***.

При решении конкретных задач нас будет интересовать частное решение, определяемое ***начальным условием***.

Обычно начальное условие задаются парой значений

в виде (x_0, y_0), $y(x_0) = y_0$, или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

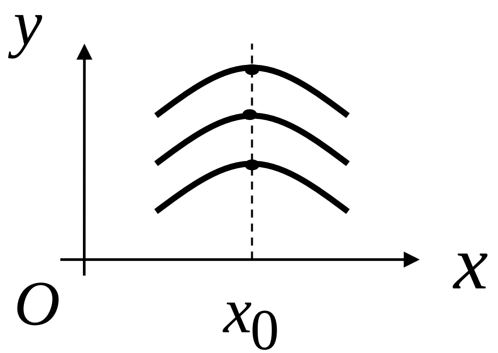
Задача отыскания частного решения по начальному условию называется ***задачей Коши***.

Теорема Коши о существовании и единственности решения

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\partial f / \partial y$ непрерывны в открытой области, содержащей точку $P(x_0, y_0)$, то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ это уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию.

- Без доказательства.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общее решение – семейство интегральных кривых.



Чтобы отыскать частное решение, нужно в общее решение

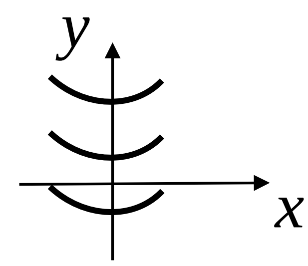
$$y = \varphi\left(x, C\right)$$

подставить x_0, y_0 из начального условия и разрешить уравнение относительно C.

Пример 3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = 2x$.

Начальное условие $y(1) = 2$.

Решение. Общее решение $y = x^2 + C$.



Действительно,

$$y' = \left(x^2 + C\right)' = 2x + 0 \equiv 2x.$$

Подставим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

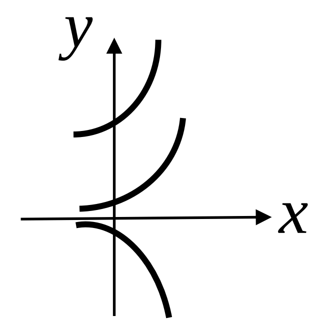
Получим алгебраическое уравнение для определения произвольной постоянной $2 = 1 + C$.

Следовательно, $C = 1$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию, будет $y = x^2 + 1$.

Пример 4. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = y$.

Начальное условие $y(0) = 2$.



Решение. Общее решение $y = Ce^x$.

Подставим $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $2 = C$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию, будет

$$y = 2e^x.$$

Пример 5. Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y+x}{x}, \quad (x > 0).$$

Начальное условие $y(1) = 0.$

Решение. Общее решение $y = x\ln x + Cx.$

Подставим $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ из начального условия в общее решение дифференциального уравнения.

Получим $C = 0.$

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям, будет

$$y = x\ln x.$$