Лекция 6
11 Криволинейные интегралы

11.3. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру

11.4 Формула Грина

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

11.6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Примеры

11.7 Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям

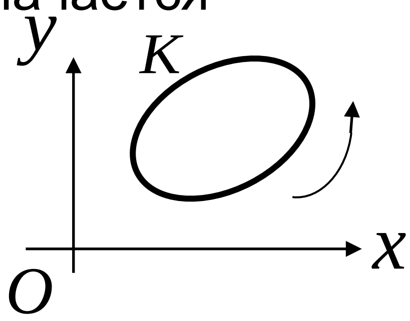
11.8 Приложения криволинейных интегралов второго рода к задачам механики

11.9 Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.3. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру

Рассмотрим на плоскости Oxy замкнутый контур K. Положительным направлением обхода контура будем считать направление против часовой стрелки и обозначать K. Направление обхода по часовой стрелке будем обозначать $-K$. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру K обозначается



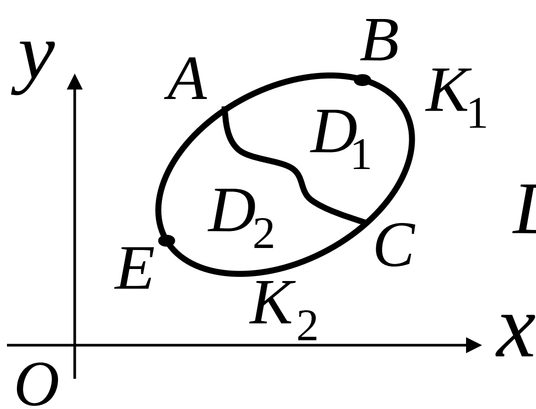
$$\oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

$$\oint_{-K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

11.3. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру Продолжение

Теорема

Если область D, ограниченную замкнутой кривой K, разбить на две части D_1 и D_2, то криволинейный интеграл по всей линии K равен сумме интегралов по линиям $K_1: CBAC$ и $K_2: AECA$.

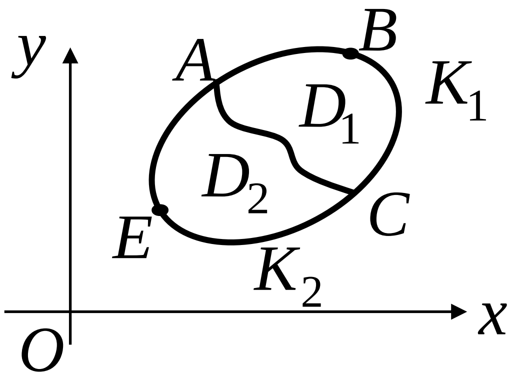


D, K

Криволинейные интегралы второго рода

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.3. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру
Продолжение



D, K

Доказательство:

(для сокращения записи не пишем $Pdx + Qdy$ под знаком интеграла)

$$\oint_{K_2} = \oint_{AEC} + \oint_{CA}, \qquad \oint_{K_1} = \oint_{AC} + \oint_{CBA},$$

$$\oint_{K_1} + \oint_{K_2} = \oint_{AEC} + \oint_{CBA} = \oint_{K}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.4 Формула Грина

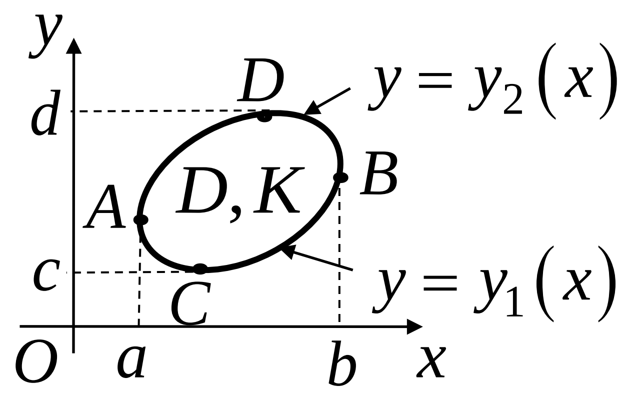
Теорема

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области D, ограниченной контуром K, то

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.4 Формула Грина
Продолжение



Доказательство

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=$$

$$=\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=\int\limits_a^b\Big(P\big(x,y_2(x)\big)-P\big(x,y_1(x)\big)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_a^b P\big(x,y_2(x)\big)dx+\int\limits_b^a P\big(x,y_1(x)\big)dx=$$

$$=\int\limits_{ADB}P(x,y)dx+\int\limits_{BCA}P(x,y)dx=-\oint\limits_K Pdx.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.4 Формула Грина
Продолжение

Аналогично получим

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx=\int\limits_c^d\Big(Q\big(x_2(y),y\big)-Q\big(x_1(y),y\big)\Big)dy=$$

$$=\int\limits_{CBD}Q(x,y)dy+\int\limits_{DAC}Q(x,y)dy=\oint\limits_K Qdy.$$

Следовательно

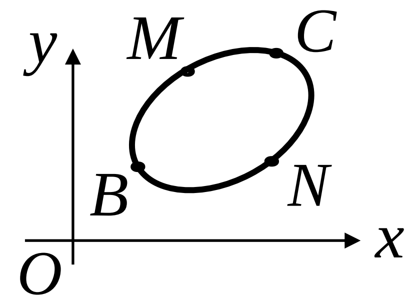
$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Физически это означает, что величина работы силового поля не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек.

Лемма. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.



Необходимость: Пусть $I_{BMC} = I_{BNC}$.

Тогда $I_L = I_{BNC} + I_{CMB} = I_{BNC} - I_{BMC} = 0.$

Достаточность: Пусть $I_{BNCMB} = 0.$ Тогда $I_{BNC} + I_{CMB} = 0.$

Следовательно,

$$I_{BMC} = -I_{CNB} = I_{BNC}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования Продолжение

Теорема

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области D. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру

$$\oint\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

не зависел от линии интегрирования, лежащей в D, необходимо и достаточно, чтобы $\forall(x,y)\in D$ выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования Продолжение

Доказательство

Достаточность: Пусть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

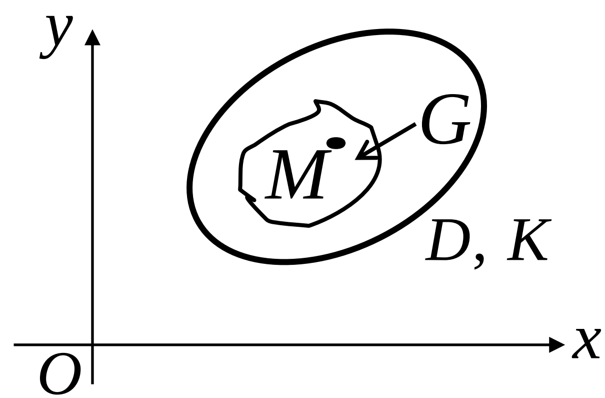
Тогда, используя формулу Грина,

$$\oint\limits_K P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования Продолжение

Необходимость:



Пусть $\oint\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$

Тогда $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$

Пусть в окрестности G точки M $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0 \quad (\text{или} < 0).$

Тогда $\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > 0 \quad (\text{или} < 0).$

Получили противоречие.

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.5 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования Продолжение

Равносильные (эквивалентные) утверждения:

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$

взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащим в области $D,$ равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$

не зависит от линии интегрирования, соединяющих две данные точки.

3) Во всех точках области D $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Примеры

1)

$$I=\oint_K \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

Пусть замкнутый контур K не содержит начало координат.

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$Q=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Следовательно

$$I=\oint_K \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.6 Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Примеры Продолжение

2) Рассмотрим тот же криволинейный интеграл по замкнутому контуру, содержащему начало координат.

Например, $$K:\ x^2+y^2=R^2.$$

В точке $M(0,0)$ функции $P(x,y),\ Q(x,y)$ и их производные не существуют.

Параметрическое уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$

$$x=R\cos t,\ \ y=R\sin t,\ \ t\in[0,2\pi).$$

Тогда $$dx=-R\sin t\,dt,\ \ dy=R\cos t\,dt.$$

$$I=\oint\limits_K\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-R\sin t(-R\sin t)+R\cos tR\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}dt=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.7 Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям

Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

равна $$A = \int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Пусть $K = BC$ гладкая кривая

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad t \in [t_B, t_C].$$

Тогда

$$A = \int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.7 Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям
Продолжение

Определение
Трехмерная область Ω называется *поверхностно односвязной*, если любой простой замкнутый кусочно-гладкий контур, принадлежащий Ω, можно стянуть в точку, лежащую в Ω.

Примеры
Односвязная поверхность: шар, эллипсоид.
Неодносвязная поверхность: тор.

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.7 Криволинейные интегралы второго рода по пространственным линиям Продолжение

Теорема

Пусть функции P, Q, R непрерывны вместе со своими производными в поверхностно односвязной области Ω.

Тогда равносильны утверждения:

1) Криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_K Pdx + Qdy + Rdz,$

взятый по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz,$

не зависит от линии интегрирования.

3) $\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \; \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \; \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}.$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.8 Приложения криволинейных интегралов второго рода к задачам механики

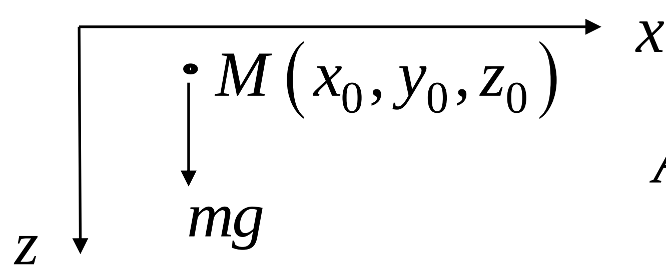
1) Работа силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z},$

то работа не зависит от пути интегрирования.

2) Поле тяжести. $\vec{F} = (P,Q,R) = (0,0,mg), \; d\vec{l} = (0,0,dz),$

$$P'_y = Q'_x = 0, \quad Q'_z = R'_y = 0, \quad R'_x = P'_z = 0.$$



$$A = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} mg\,dz = mg\int\limits_{z_0}^{z} dz = mgz - mgz_0.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

11.9 Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

$$\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz = \left| dx = dl\cos\alpha,\ dy = dl\cos\beta,\ \ dz = dl\cos\gamma \right| =$$

$$= \int\limits_K \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) dl.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016