Лекция 5
11 Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы

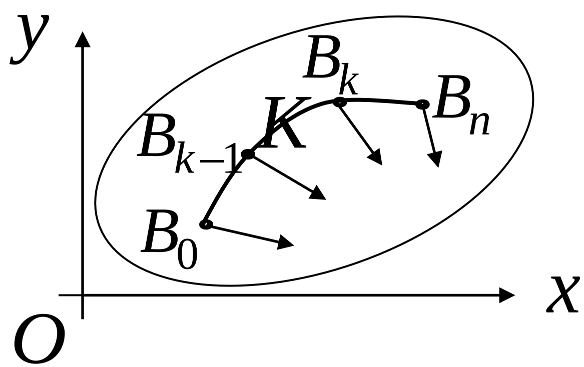
11.2 Криволинейный интеграл по координатам второго рода

Задача о работе силового поля

Предположим, что в области D задано плоское силовое поле, т. е. на материальную точку в D действует сила $\vec{F}$, определенная для всякой точки: $\vec{F} = \vec{F}\left(x, y\right)$. Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени t)

$$\vec{F} = P\left(x, y\right)\vec{i} + Q\left(x, y\right)\vec{j}, \quad \left(x, y\right) \in D.$$

Пусть материальная точка движется по линии K.



11.2 Криволинейный интеграл по координатам второго рода Продолжение

Разобьем линию K на n частей точками $B_0, B_1, \ldots, B_n$.

Работа на отрезке $\overrightarrow{B_{k-1}B_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$ равна

$\Delta A_k = \left|\vec{F}_k\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_{k-1}B_k}\right| \cos \alpha_k$ или $\Delta A_k = \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_{k-1}B_k}$.

Тогда $\Delta A_k = P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k$.

Просуммируем по всем отрезкам

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой по линии K. Пусть Δl_k длина частичного участка разбиения кривой K.

Переходя к пределу при $\max \Delta l_k \to 0 \ (n \to \infty)$, получим величину работы

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta l_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

11.2 Криволинейный интеграл по координатам второго рода Продолжение

Определение

Криволинейным интегралом второго рода по линии K называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой K

$$\lim_{\substack{\max \Delta l_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

11.2 Криволинейный интеграл по координатам второго рода Продолжение

В частности, если $Q(x,y)\equiv 0$, то интеграл примет вид

$$\int_K P(x,y)\,dx$$

и называется криволинейным интегралом по координате x.

Если $P(x,y)\equiv 0$, то интеграл примет вид

$$\int_K Q(x,y)\,dy$$

и называется криволинейным интегралом по координате y.

Работа силового поля $\vec{F}$ по кривой K есть

$$\int_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - проекции силового поля на оси координат Ox и Oy соответственно.

11.2.1 Вычисление криволинейного интеграла второго рода *(сводится к вычислению определенных интегралов)*

Например, вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_K P(x,y)\,dx$$

от точки B до точки C по линии K, заданной параметрически $x = x(t),\ y = y(t)$, где функции $x(t),\ y(t)$ непрерывны со своими производными. Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k, \qquad \xi_k \in [x_{k-1},x_k],\ \eta_k \in [y_{k-1},y_k],$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Из формулы Лагранжа $\quad \Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k,$

$$\theta_k \in [t_{k-1},t_k], \qquad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

11.2.1 Вычисление криволинейного интеграла второго рода Продолжение

В качестве промежуточной точки $\left(\xi_k, \eta_k\right)$ выберем $\xi_k = x\left(\theta_k\right),\ \eta_k = y\left(\theta_k\right).$

Преобразованная сумма $$\sum_{k=1}^{n} P\left(x\left(\theta_k\right), y\left(\theta_k\right)\right) x'\left(\theta_k\right) \Delta t_k$$

будет интегральной суммой для функции одной переменной $P\left(x(t), y(t)\right) x'(t)$, а ее предел – определенным интегралом

$$\int_{t_B}^{t_C} P\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\, dt.$$

Т. е. $$\int_K P(x, y)\, dx = \int_{t_B}^{t_C} P\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\, dt.$$

Аналогично, $$\int_K Q(x, y)\, dy = \int_{t_B}^{t_C} Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\, dt.$$

11.2.1 Вычисление криволинейного интеграла второго рода Продолжение

Правило

Вычисление криволинейного интеграла второго рода от точки B до точки C по линии $K: \quad x = x(t),\ y = y(t)$ производится по формуле

$$\int\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t), y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t) \Big) dt.$$

11.2.1 Вычисление криволинейного интеграла второго рода Продолжение

Следовательно, криволинейный интеграл второго рода всегда существует, если $P(x,y),\ Q(x,y)$ кусочно- непрерывны на K, с конечным числом разрывов первого рода, а $x(t),\ y(t)$ непрерывны со своими производными.

Если уравнение линии задано в явном виде $y=y(x),$ то, полагая $x=t,$ имеем

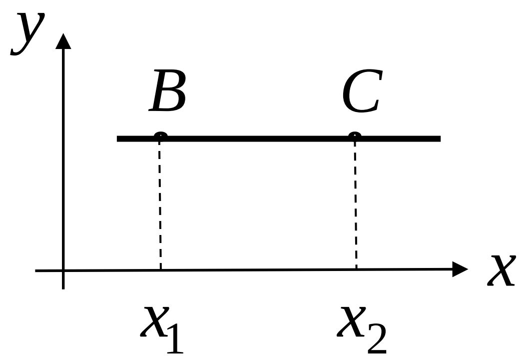
$$\int\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{x_B}^{x_C}\Big(P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx.$$

Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры

1)

$$K: \quad y = y_0, \; x \in [x_1, x_2].$$

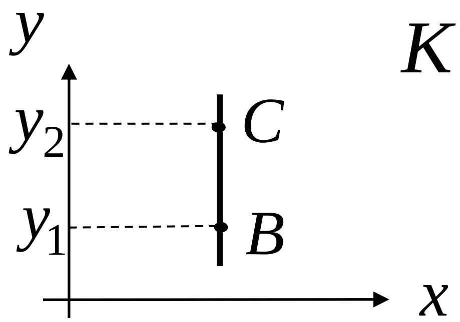


$$dy = 0$$

$$\int_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_0)\,dx.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

2)



$$K:\ x = x_0,\ y \in [y_1, y_2].$$

$$dx = 0$$

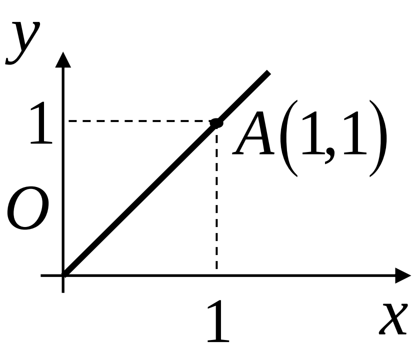
$$\int\limits_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)\,dy.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

3) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_K xydx+(x+y)dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $K:\ \ y=x.$



$$dy=dx$$

$$I=\int\limits_0^1\left(x^2+2x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

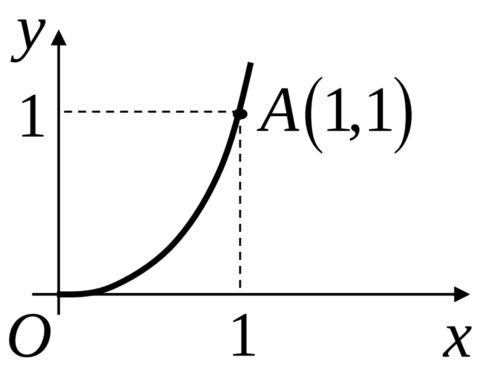
11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

4) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_K xydx + (x+y)dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $K:\;\; y = x^2.$

$$dy = 2xdx$$



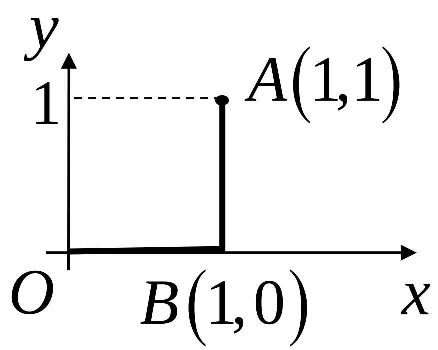
$$I = \int_0^1 \left(x^3 + 2x\left(x + x^2\right)\right)dx = \frac{17}{12}.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

5) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{OBA} xydx + (x+y)dy$$

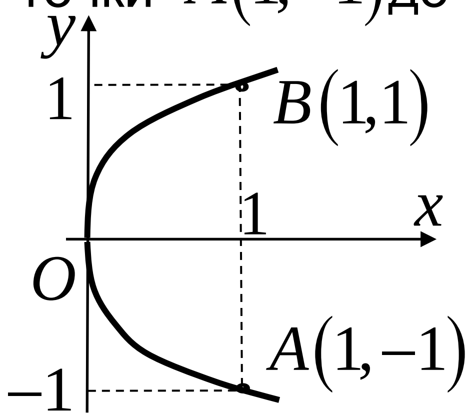
от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по пути OBA, где линия OB задана уравнением $y=0$ $(dy=0)$, а линия BA задана уравнением $x=1$ $(dx=0)$.



$$I = \int\limits_0^1 (1+y)dy = \left.\frac{(1+y)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

6) Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_K xydx$ от точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$ по линии $K: x=y^2.$



Рассмотрим два случая:

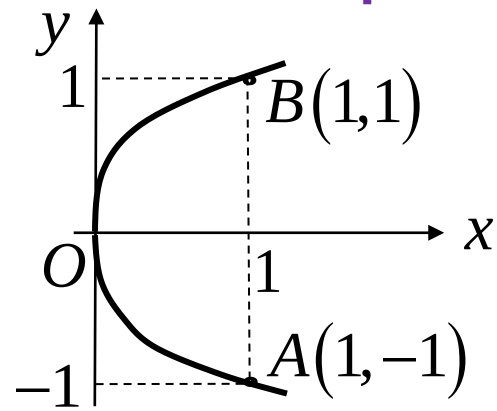
А) Проинтегрируем по $dy.$

Тогда $K: x=y^2.$

Дифференциал $dx=2ydy.$

$$I=\int\limits_{-1}^{1} y^2 y\cdot 2ydy=\frac{2y^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение



Б) Проинтегрируем по $dx.$

На участке AO уравнение линии будет $y=-\sqrt{x}.$

На участке OB уравнение линии будет $y=\sqrt{x}.$

Интеграл I можно представить в виде суммы интегралов

$$I=\int\limits_{AO}xydx+\int\limits_{OB}xydx=-\int\limits_{1}^{0}x\sqrt{x}dx+\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{x}dx=$$

$$=\left|-\int\limits_{1}^{0}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx\right|=2\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}.$$

11.2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры Продолжение

7) Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int_K y\,dx-x\,dy$$

от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi,0)$, где K одна арка циклоиды

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$$

Параметр t изменяется от 0 до 2π.

$$I=\int_0^{2\pi}\left[4(1-\cos t)^2-4(t-\sin t)\sin t\right]dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=4\left[2t\Big|_0^{2\pi}-2\sin t\Big|_0^{2\pi}-(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}\right]=24\pi.$$