Лекция 4
11 Криволинейные интегралы

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода

Дифференциал длины дуги в плоском случае для линии, заданной уравнением $y = y(x)$, равен

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Дифференциал длины дуги в пространственном случае для линии, заданной уравнениями $y = y(x),\ z = z(x)$, равен

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\,dx.$$

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода Продолжение

При параметрическом задании линии

$$x = x(t),\ \ y = y(t), \quad z = z(t)$$

дифференциал длины дуги в плоском случае равен

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

а в пространственном случае

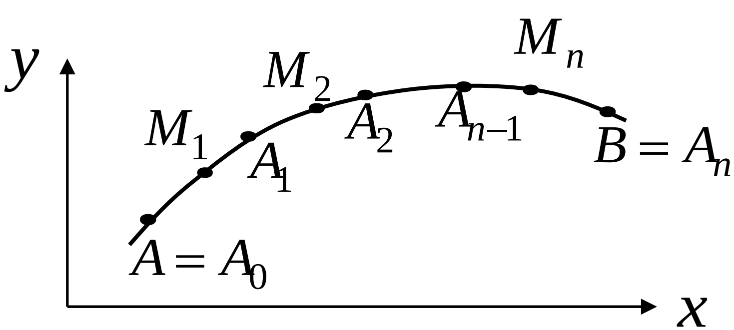
$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода Продолжение

Определение

Криволинейным интегралом первого рода $\int\limits_K f(x,y)\,dl$

от функции двух переменных $f(x,y)$ (заданной в некоторой связной области),взятым по отрезку $K = AB$ плоской кривой (этот отрезок находится в той же области и называется путем интегрирования), заданной своим уравнением , называется число, получаемое следующим образом:



Криволинейные интегралы первого рода

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода Продолжение

1) Отрезок AB разбивается на n элементарных отрезков произвольно выбранными точками $A_1,\ldots,A_{n-1}$, идущими от начала отрезка $A = A_0$ до его конца $B = A_n$.

2) Внутри (или на границе) каждого элементарного отрезка $A_{i-1}A_i$ выбирается одна произвольная точка M_i с координатами x_i, y_i.

3) Значения функции $f\left(x_i, y_i\right)$ в этих выбранных точках умножаются на длины отрезков $A_{i-1}A_i = \Delta l_i$ (эти длины считаются положительными).

4) Все полученные n произведений $f\left(x_i, y_i\right)\Delta l_i$ складываются.

5) Вычисляется предел суммы $\lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta l_i$.

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода Продолжение

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения K и от выбора точек A_i, M_i, то он называется *криволинейным интегралом 1-го рода*

$$\int_K f(x,y)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \qquad \text{(A)}$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции трех переменных $f(x,y,z)$, взятый по отрезку K пространственной кривой

$$\int_K f(x,y,z)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i. \qquad \text{(Б)}$$

11.1 Криволинейный интеграл по длине дуги первого рода Продолжение

Теорема существования

Если функция $f\left(x, y\right)$ или $f\left(x, y, z\right)$ непрерывна, а кривая на отрезке K непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную, то криволинейный интеграл 1-го рода типа (А) или (Б) существует.

Т. е. пределы существуют и не зависят от выбора точек

$$A_i,\ M_i.$$

11.1.1 Вычисление криволинейного интеграла первого рода

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (t_0, t_1)$, то

$$\int\limits_K f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt. \qquad \text{(А)}$$

Для пространственной кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$
$t \in (t_0, t_1)$

$$\int\limits_K f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt. \qquad \text{(Б)}$$

Здесь значение параметра t_0 берется для точки A ,
значение параметра t_1 берется для точки B.
Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $t_0 < t_1$.

11.1.1 Вычисление криволинейного интеграла первого рода Продолжение

2) Если уравнения пути интегрирования заданы в явном виде $y=y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y=y(x),\ z=z(x)$), то

$$\int\limits_K f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad \text{(A)}$$

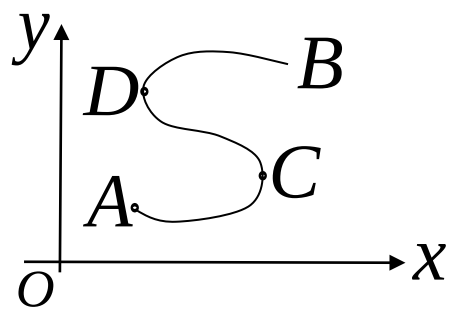
$$\int\limits_K f(x,y,z)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x),z(x))\sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx. \qquad \text{(Б)}$$

Здесь значение $x=a$ берется для точки A, значение $x=b$ берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $a<b$.

11.1.1 Вычисление криволинейного интеграла первого рода Продолжение

Замечание.

Пусть кривая такова, что для заданного x координата y принимает несколько значений, например:



Тогда кривую нужно разбить промежуточными точками на отрезки таким образом, чтобы для каждого отрезка выполнялось взаимно однозначное соответствие между x и y, и интегрировать в сторону увеличения координаты x.

Для данного примера криволинейный интеграл 1-го рода примет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{DC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{DB} f(x,y)\,dl.$$

11.1.2 Приложения криволинейного интеграла первого рода

1) Длина криволинейного отрезка K:

$$L = \int\limits_K dl.$$

2) Масса криволинейного отрезка K переменной плотности

$\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$M = \int\limits_K \gamma(x, y, z)\, dl.$$

11.1.2 Приложения криволинейного интеграла первого рода Продолжение

Пример.

Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_K y dl,$

где K - дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(4, \sqrt{8}\right).$

Удобно задать уравнение параболы в виде $x = \dfrac{y^2}{2}$ и вычислять интеграл по координате $y.$

Производная равна $x' = y.$ Интеграл примет вид

$$I = \int\limits_K y dl = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}\,dy = \left.\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\sqrt{8}} = \frac{26}{3}.$$