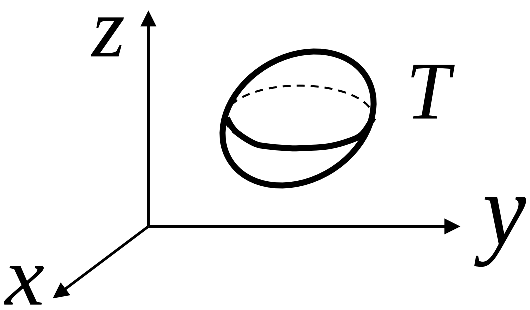
Лекция 3
10 Тройной интеграл

10.1 Масса неоднородного тела. Тройной интеграл



Рассмотрим тело T переменной плотности

$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$

Разобьем тело произвольным образом на n элементарных частей $\Delta T_1, \Delta T_2, ..., \Delta T_n$ с элементарными объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n.$
Выберем в каждой из элементарных частей произвольную точку

$$M_k(x_k, y_k, z_k).$$

Масса элементарной части приближенно равна

$$\Delta M_k \approx \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k.$$

10.1 Масса неоднородного тела. Тройной интеграл Продолжение

Просуммируем массу всех элементарных частей

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta v_k .$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой. Устремим наибольший диаметр элементарных частей к нулю и рассмотрим предел

$$\lim_{\max \operatorname{diam} \Delta T_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta v_k .$$

Если этот предел интегральной суммы существует, то, очевидно, он равен массе тела и называется *тройным интегралом* от функции $\gamma = \gamma\left(x, y, z\right)$ по области T

$$M = \lim_{\max \operatorname{diam} \Delta T_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta v_k = \iiint\limits_{T} \gamma\left(x, y, z\right) dv.$$

Тройной интеграл

10.1 Масса неоднородного тела. Тройной интеграл Продолжение

Вообще, тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T называется предел интегральной суммы

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dv = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta v_k .$$

Этот предел не зависит ни от способа разбиения тела, ни от выбора точек (x_k, y_k, z_k).

10.2 Свойства тройных интегралов

Свойства двойных интегралов переносятся на тройные интегралы

1) $$\iiint\limits_T \left(f_1(x,y,z) \pm \ldots \pm f_n(x,y,z) \right) dv = \\ = \iiint\limits_T f_1(x,y,z)\,dv \pm \ldots \pm \iiint\limits_T f_n(x,y,z)\,dv.$$

2) $$\iiint\limits_T cf(x,y,z)\,dv = c\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dv.$$

3) $T = T_1 \bigcup T_2$, $T_1 \bigcap T_2 = \varnothing$. Тогда

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dv + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dv.$$

10.2 Свойства тройных интегралов Продолжение

4) Если $\forall (x, y, z) \in T \qquad f_1(x, y, z) \ge f_2(x, y, z)$,

то $$\iiint_T f_1(x, y, z)\,dv \ge \iiint_T f_2(x, y, z)\,dv.$$

5) Если $m = f_{\text{наим}}$ в T, $\quad M = f_{\text{наиб}}$ в T,

то $mV \le \iiint_T f(x, y, z)\,dv \le MV$, где $V = \iiint_T dv.$

6) $$\iiint_T f(x, y, z)\,dv = f(\xi, \eta, \varsigma)V, \qquad (\xi, \eta, \varsigma) \in T,$$

$f(\xi, \eta, \varsigma)$ - среднее значение f в области T.

10.3 Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

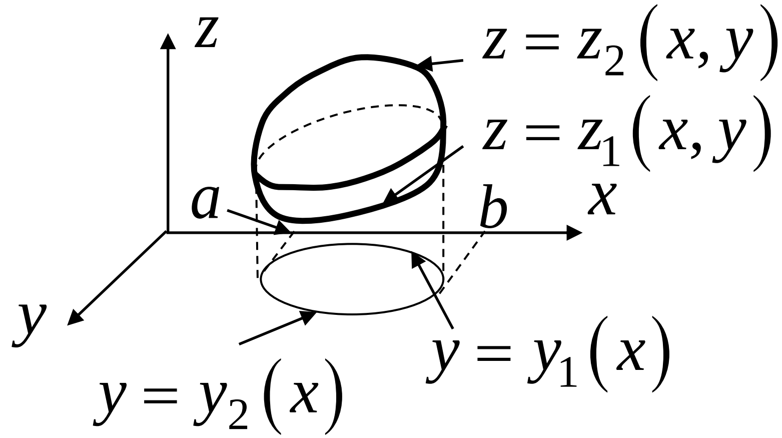
Пусть дан тройной интеграл $I = \iiint\limits_T f(x, y, z)\, dv.$

- Разобьем область интегрирования T на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям.
- Тогда объем элементарной области равен $dv = dxdydz.$
- Следовательно,

$$I = \iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz.$$

10.3 Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах
Продолжение

- Установим правило вычисления тройного интеграла



$$I = \iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Тройной интеграл

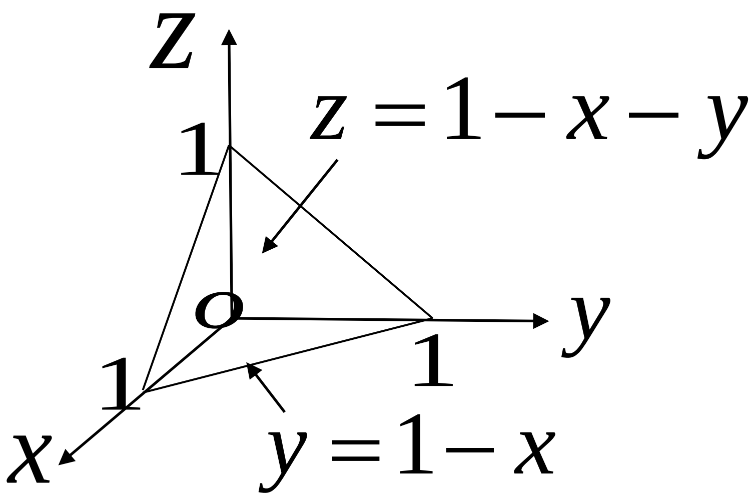
10.3 Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах
Продолжение

Пример
Вычислить тройной интеграл $$I=\iiint\limits_T (x+y+z)\,dxdydz$$

по области T, ограниченной плоскостями:

$$x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ \ x+y+z=1.$$

Построим область интегрирования:



$$T:\begin{cases}0\le x\le 1;\\ 0\le y\le 1-x;\\ 0\le z\le 1-x-y.\end{cases}$$

10.3 Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах
Пример. Продолжение

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\left(-\frac{x^2}{2}y-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

10.4 Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \left(0 \le r < +\infty,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ -\infty < z < +\infty\right).$$

Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

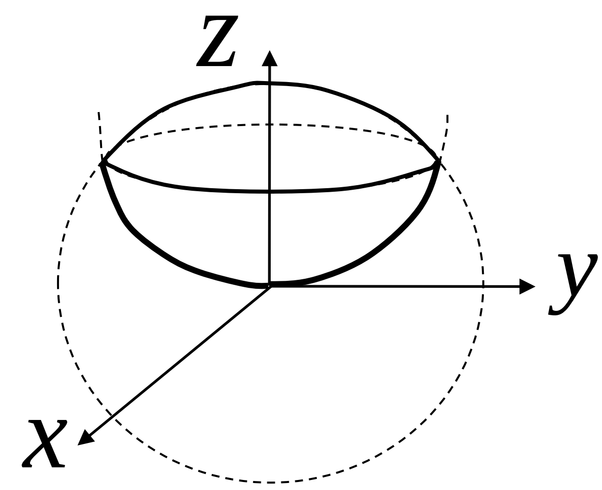
Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид $\iiint\limits_T f\left(x, y, z\right)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right)rd\varphi drdz.$

10.4 Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах
Продолжение

Пример

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T z\,dv$ по области,

ограниченной поверхностями



$$T:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; z = z,\;\; J = r.$$

10.4 Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах
Пример. Продолжение

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \to z = r^2.$$

Уравнение верхней полусферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \to z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей $z = r^2$ и $z = \sqrt{6 - r^2}$ является окружность радиуса

$$r = \sqrt{2} \qquad \left(r^2 + r^4 = 6\right).$$

10.4 Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах
Пример. Продолжение

Переменные изменяются в следующих пределах:

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

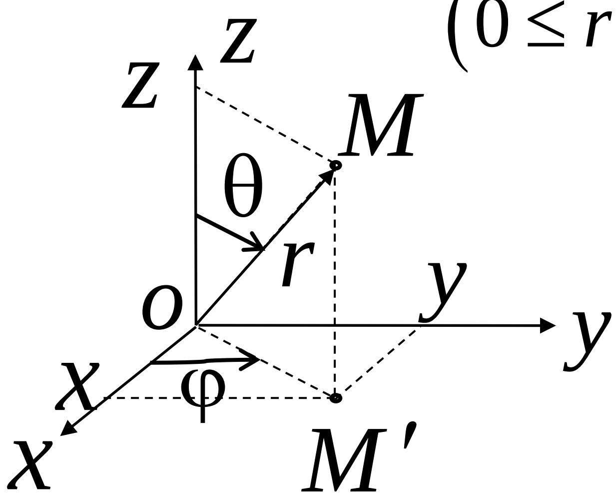
$$I = \iiint_T z\,dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - r^2 - r^4\right) r\,dr = \frac{11}{3}\pi.$$

10.5 Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right).$$



Якобиан преобразования вычисляется по формуле

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

10.5 Вычисление тройных интегралов в сферических координатах
Продолжение

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{T^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,dr\,d\theta,$$

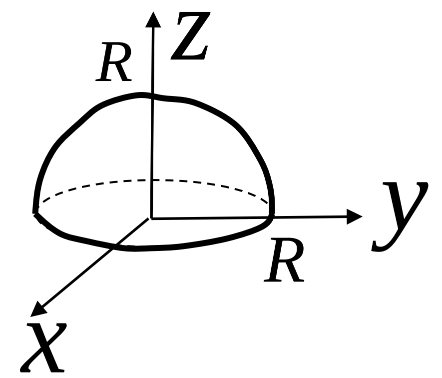
где T^* - область изменения координат $r, \varphi, \theta.$

10.5 Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

Продолжение

Пример

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) dv,$



где область T - верхняя половина шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \;\; y = r\sin\theta\sin\varphi, \;\; z = r\cos\theta, \;\; J = r^2\sin\theta.$$

Для данной области интегрирования, переменные изменяются в пределах: $0 \leq r \leq R, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}.$

10.5 Вычисление тройных интегралов в сферических координатах
Пример. Продолжение

Интеграл запишется в виде:

$$I = \iiint_T \left(x^2 + y^2\right) dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta =$$

$$= 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 \theta - 1\right) d\left(\cos \theta\right) =$$

$$= 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta\right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{15} \pi R^5.$$

10.6 Приложения тройных интегралов

1) Масса тела T переменной плотности $\gamma(x, y, z)$.
Массу тела M можно вычислить по формуле

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dv.$$

2) Статические моменты инерции тела T относительно координатных плоскостей $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\,dv, \qquad M_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\,dv,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\,dv.$$

10.6 Приложения тройных интегралов Продолжение

3) Координаты центра тяжести тела T :

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv},$$

$$z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dv}.$$

10.6 Приложения тройных интегралов Продолжение

4) Моменты инерции тела T относительно координатных осей:

$$J_x = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_y = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right)dv.$$

10.6 Приложения тройных интегралов Продолжение

5) Центробежные моменты инерции тела T :

$$J_{xy} = \iiint\limits_T xy\gamma(x,y,z)\,dv, \quad J_{xz} = \iiint\limits_T xz\gamma(x,y,z)\,dv,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_T yz\gamma(x,y,z)\,dv.$$

6) Полярный момент инерции тела T :

$$J_0 = \iiint\limits_T \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dv.$$