Лекция 2

9 Двойной интеграл

Кратные интегралы

9.4 Замена переменных в двойном интеграле

При переходе от переменных x, y к переменным u, v

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \qquad (x,y) \in D, \quad (u,v) \in D^*,$$

двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} z\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|\,dudv,$$

где J - *функциональный определитель Якоби* (якобиан).

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

9.4 Замена переменных в двойном интеграле Продолжение

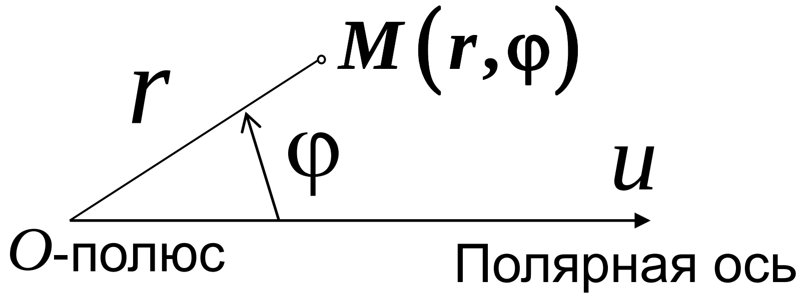
1) область D заменяем на D^*;

2) $d\sigma = |J|\,dudv$ - дифференциал площади в координатах u, v.

Предполагается, что функции $x = x(u,v),\;\; y = y(u,v)$

непрерывны со своими частными производными в D^*.

9.5 Двойной интеграл в полярных координатах



- $r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус;
- $\varphi(M)$ - полярный угол, принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на $2k\pi$;
- Значение φ: $0\le\varphi<2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi<\varphi\le\pi$);
- Положение любой точки определяется заданием $r,\ \varphi$

$$\left(0\le r<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\right).$$

9.5 Двойной интеграл в полярных координатах Продолжение

- Связь декартовых и полярных координат (полюс совпадает с началом координат, полярная ось совпадает с положительной полуосью осью Ox) :

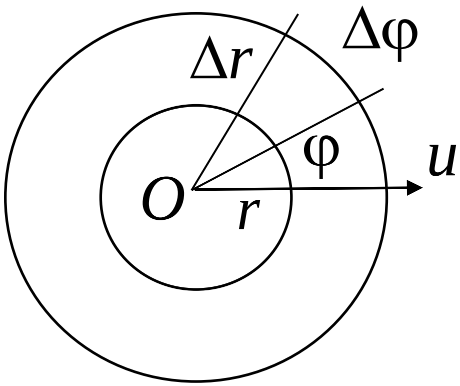
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ (r,\varphi) \in D^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

- Вычислим якобиан: $J = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$
- Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в полярных координатах примет вид:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

9.5 Двойной интеграл в полярных координатах Продолжение

- Элемент площади в полярных координатах вычисляется по формуле



$$\Delta r = dr,$$

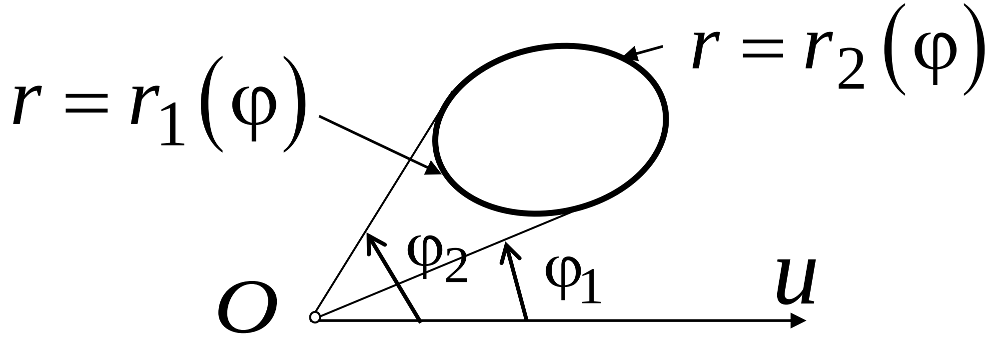
$$\Delta\varphi = d\varphi$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi \approx r\Delta r\Delta\varphi,$$

дифференциал площади $d\sigma = r dr d\varphi.$

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

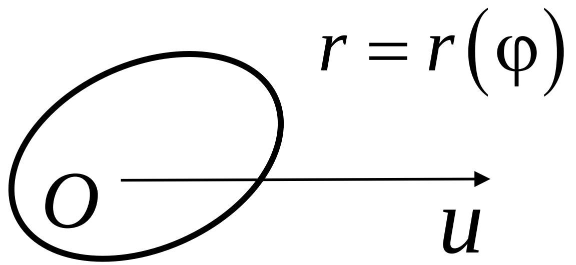
1) Полюс не содержится внутри области D.



$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr.$$

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры
Продолжение

2) Полюс содержится внутри области D.

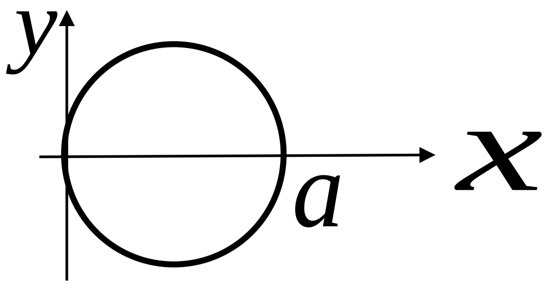


$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr.$$

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

Продолжение

3) $D:\ x^2 + y^2 \le ax.$



Введем полярные координаты $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ J = r.$

Уравнение границы примет вид $r^2 = ar\cos\varphi$

или $r = a\cos\varphi.$

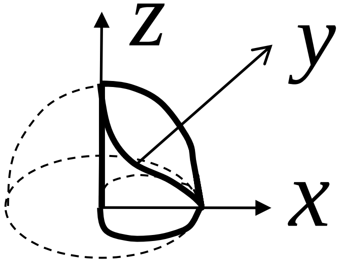
Тогда

$$D^*:\ \begin{cases} -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, \\ 0 \le r \le a\cos\varphi \end{cases}$$

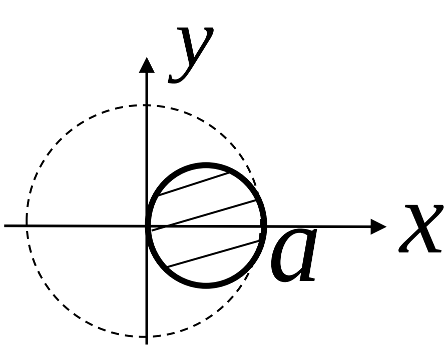
$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr.$$

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры
Продолжение

4) Найти объем общей части шара радиуса $r_1 = a$ с центром в начале координат и цилиндра радиуса $r_2 = a/2$, уравнения оси которого $x = a/2,\ \ y = 0.$



На рисунке изображена верхняя половина объема.



Область интегрирования есть проекция тела на опорную плоскость Oxy.
Так как областью интегрирования является круг, то удобно перейти к полярным координатам (см. пример 3).

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

Пример 4. Продолжение

Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ для верхней полусферы

имеем $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$.

9.6 Двойной интеграл в полярных координатах. Примеры

Пример 4. Продолжение

Так как фигура симметрична относительно опорной плоскости и относительно плоскости Oxz , то можно рассмотреть четверть объема и результат умножить на четыре

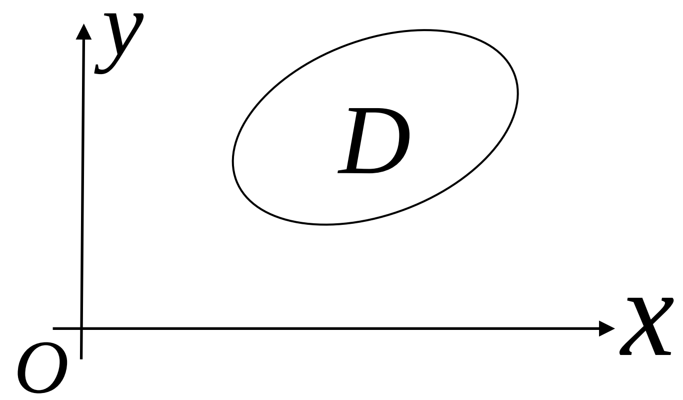
$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = -2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, d\left(a^2 - r^2\right) =$$

$$= -4\int_0^{\pi/2} d\varphi \left.\frac{\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}}{3}\right|_0^{a\cos\varphi} = -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \left(a^3 \sin^3\varphi - a^3\right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

9.7 Приложения двойных интегралов

1) Масса плоской пластинки.



- Поверхностная плотность $\mu(x, y)$.
- Дифференциал массы равен $dM = \mu(x, y)\,d\sigma$.
- Масса всей пластинки равна $M = \iint\limits_D \mu(x, y)\,d\sigma.$

Двойной интеграл

9.7 Приложения двойных интегралов
Продолжение

2) Статические моменты инерции и центр тяжести пластинки

$$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(x_k, y_k)\Delta\sigma_k, \quad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(x_k, y_k)\Delta\sigma_k.$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma, \qquad M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma.$$

$$x_{ц.т.} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}, \quad y_{ц.т.} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}.$$

9.7 Приложения двойных интегралов Продолжение

3) Моменты инерции пластинки.

$$I_x = \iint\limits_D y^2 d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 d\sigma.$$

Центробежный момент инерции $$I_{xy} = \iint\limits_D xy d\sigma.$$

Полярный момент инерции относительно оси Oz

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) d\sigma = I_x + I_y.$$