Лекция 1

9 Двойной интеграл

9.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл

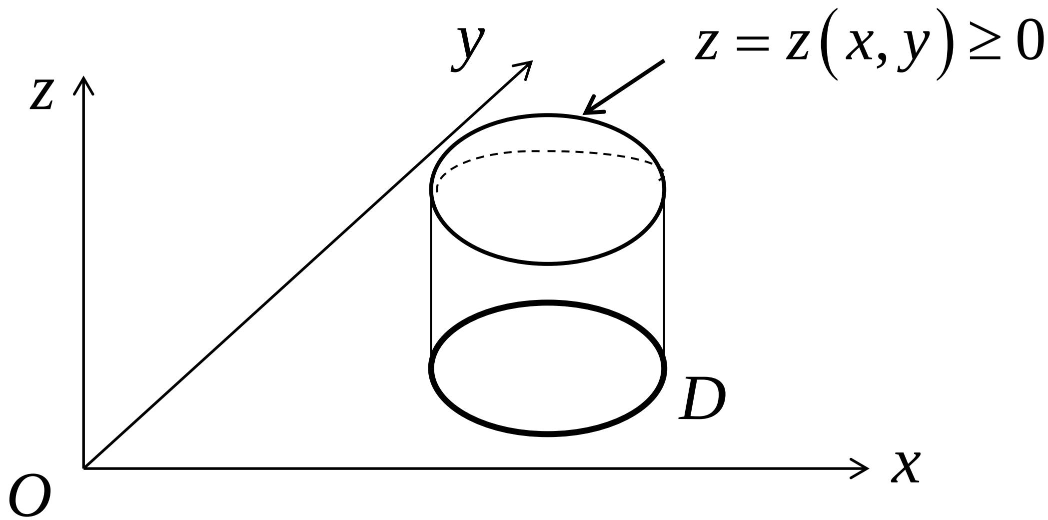
9.2 Свойства двойных интегралов

9.3 Вычисление двойных интегралов . Примеры

Кратные интегралы

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела . Двойной интеграл

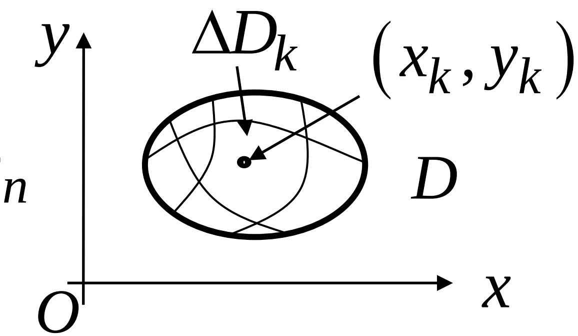


- *Цилиндрическим телом* называется тело, ограниченное замкнутой областью D плоскости Oxy , поверхностью $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей – границей области D .

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела . Двойной интеграл Продолжение

- Разобьем область D на n произвольных частичных областей $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n,$ каждая площадью $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ $\left(k \in (1, ..., n)\right).$



- Выберем в каждой из частичных областей произвольную точку с координатами (x_k, y_k). Объем цилиндрического тела между опорной плоскостью Oxy и поверхностью $z = z(x, y)$ над частичной областью ΔD_k равен $\Delta V_k \approx z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$. Объем всего цилиндрического тела равен

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела . Двойной интеграл Продолжение

- Устремим наибольший диаметр частичных областей ΔD_k к нулю, при этом $\max \operatorname{diam}(\Delta D_k) \to 0$, $n \to \infty$ и рассмотрим предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta D_k) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k) \Delta\sigma_k .$$

- Если этот предел существует, то

$$V = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta D_k) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k) \Delta\sigma_k .$$

Двойной интеграл

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл Продолжение

Определение

Двойным интегралом от функции $z(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta D_k)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = \iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma.$$

Здесь

- $z(x,y)d\sigma$ – подынтегральное выражение;
- $z(x,y)$ – подынтегральная функция;
- $d\sigma$ – дифференциал площади;
- D – область интегрирования.

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл Продолжение

Таким образом, вычисление объема цилиндрического тела сводится к вычислению двойного интеграла, т.е.

$$V = \iint_D z(x, y)\, d\sigma.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл Продолжение

Теорема существования двойного интеграла

Если $z(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то ее интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел не зависит от способа разбиения области на частичные области ΔD_k и выбора в них точек (x_k, y_k).

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.2 Свойства двойных интегралов

- 1)

$$\iint_D \left(z_1(x,y) \pm \ldots \pm z_n(x,y)\right) d\sigma = \iint_D z_1(x,y)\, d\sigma \pm \ldots \pm \iint_D z_n(x,y)\, d\sigma.$$

- 2) $$\iint_D c z(x,y)\, d\sigma = c \iint_D z(x,y)\, d\sigma.$$

- 3) Если $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint_D z(x,y)\, d\sigma = \iint_{D_1} z(x,y)\, d\sigma + \iint_{D_2} z(x,y)\, d\sigma.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.2 Свойства двойных интегралов Продолжение

- 4) Если $\forall(x,y)\in D \quad z_1(x,y)\geq z_2(x,y)$, то

$$\iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma\geq\iint\limits_D z_2(x,y)\,d\sigma.$$

- 5) Если $m=z_{\text{наим}}$ в D, $M=z_{\text{наиб}}$ в D, то

$$mS\leq\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma\leq MS,$$ где $S=\iint\limits_D d\sigma$ - площадь D.

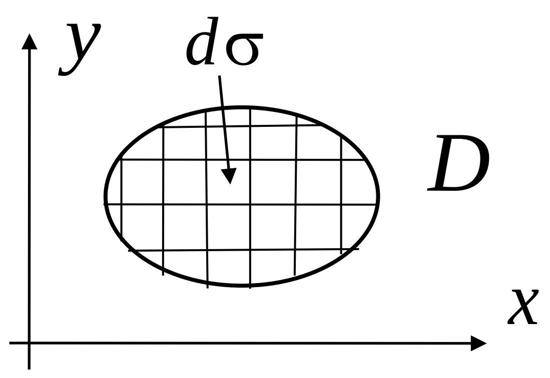
- 6) $\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma=z(\xi,\eta)S,\quad(\xi,\eta)\in D,$

где $z(\xi,\eta)$ - среднее значение z в области D.

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов

Разобьем область D с помощью линий, параллельных осям координат, с шагом dx и dy соответственно. Тогда $d\sigma = dxdy$ и, следовательно,



$$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy.$$

При вычислении двойного интеграла будем использовать формулу

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx,$$

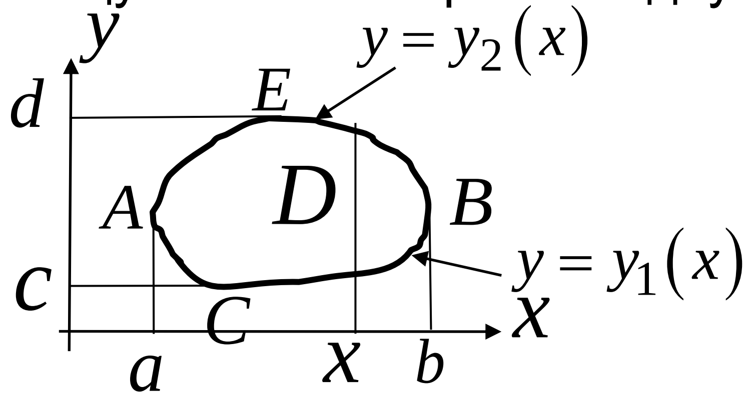
где $S(x)$ - площадь поперечного сечения тела плоскостью

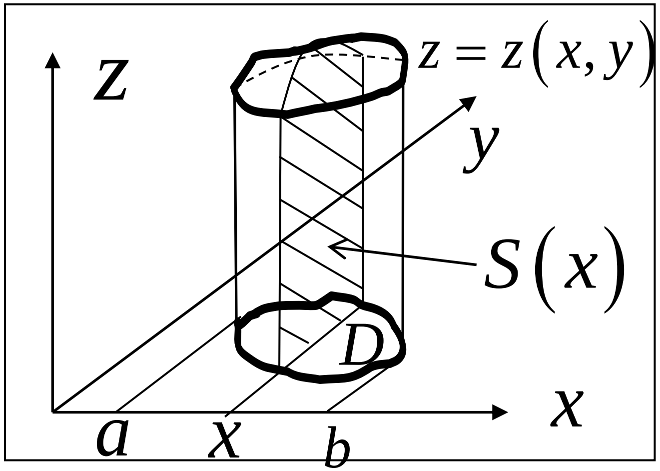
$$x = \mathrm{const}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов Продолжение

Предположим, что любая прямая, параллельная осям Ox или Oy, и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области D ровно в двух точках.





$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Здесь при вычислении интеграла по dy считается, что

$$x = \text{const}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов Продолжение

Согласно (*) получим: $$V=\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy. \qquad (**)$$

Изменив порядок интегрирования, аналогично получим

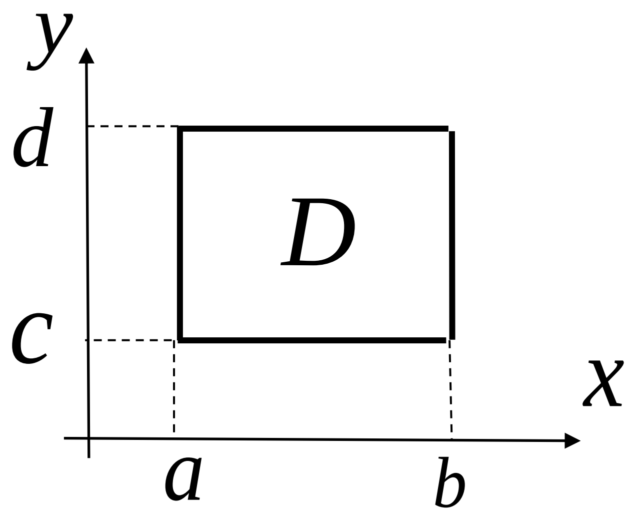
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx. \qquad (***)$$

Правые части формул (**) и (***) называются *повторными* (или *двукратными*) интегралами. Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному.

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры

1) Записать двойной интеграл от функции $z(x, y)$ по области D.

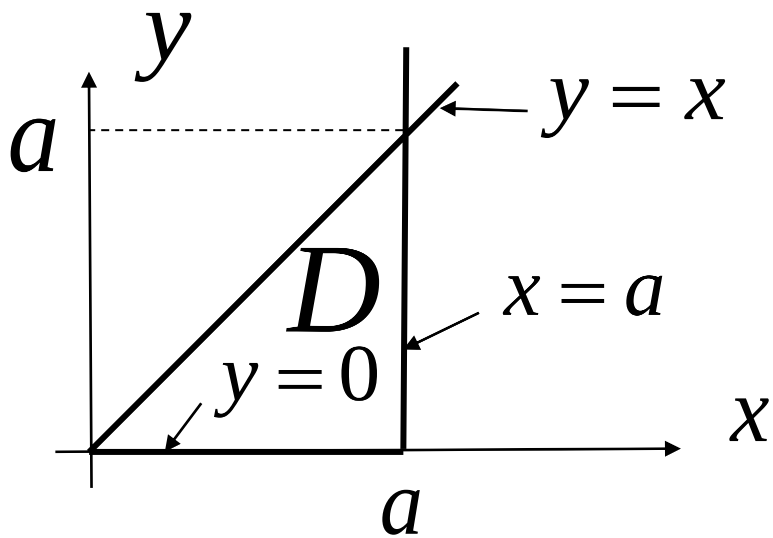


$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d z(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b z(x,y)\,dx.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

2) Записать двойной интеграл от функции $z(x,y)$ по области D.

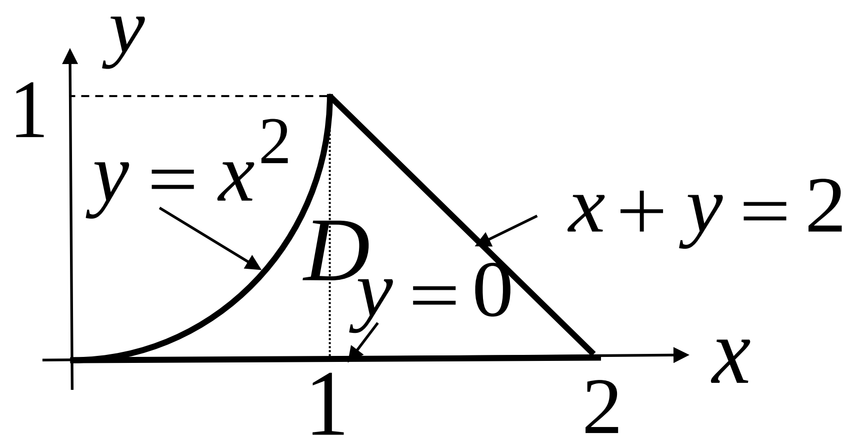


$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int_0^a dx\int_0^x z(x,y)\,dy = \int_0^a dy\int_y^a z(x,y)\,dx.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

3) Записать двойной интеграл от функции $z(x,y)$ по области D.



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy =$$

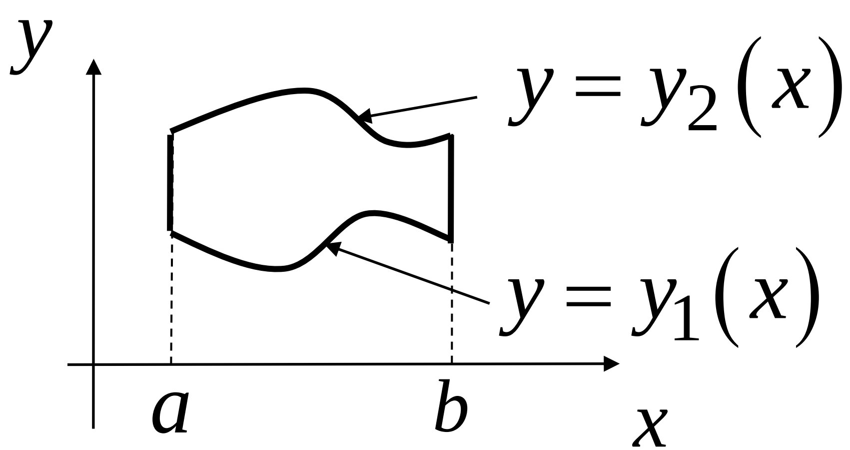
$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} z(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} z(x,y)\,dx.$$

Двойной интеграл

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

4)

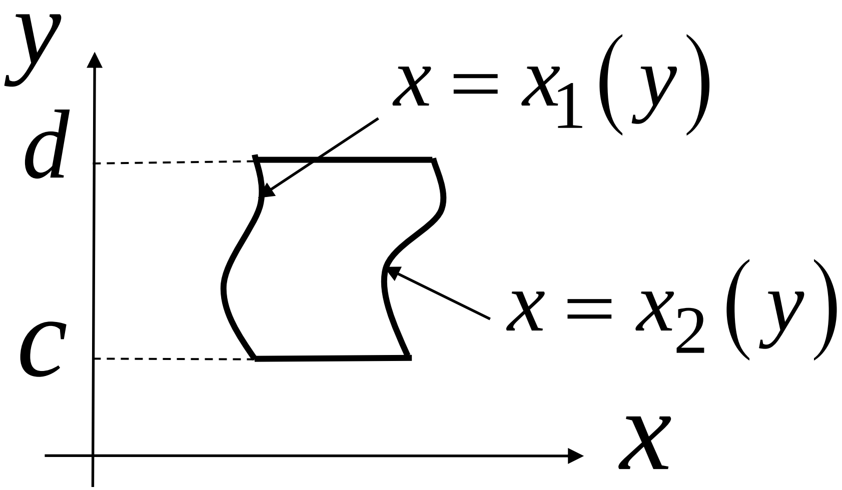


$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

5)



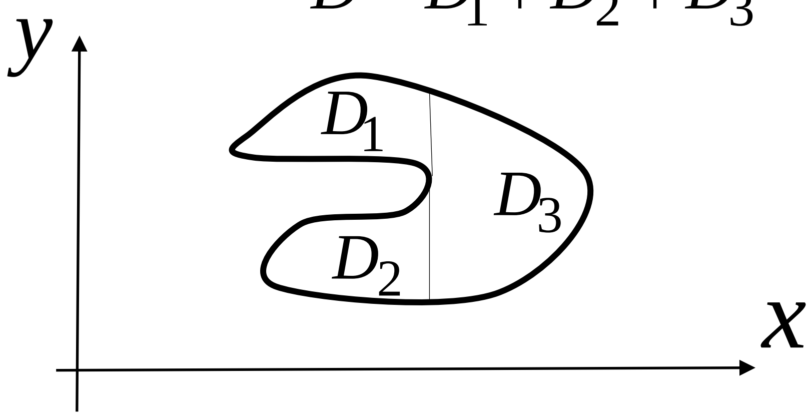
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

6)



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy =$$

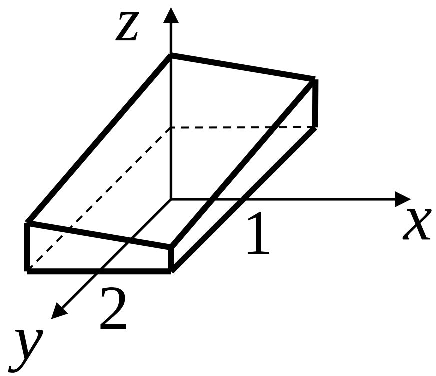
$$= \iint\limits_{D_1} z(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} z(x,y)\,dxdy.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

7) Вычислить двойной интеграл от функции $z(x,y)$ по области D .

$$z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y, \qquad D: \left(-1 \le x \le 1;\ -2 \le y \le 2\right).$$



$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2 \right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 8.$$

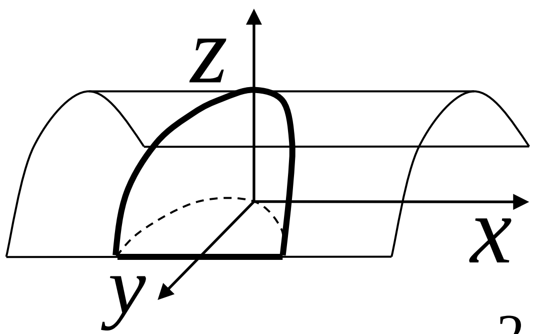
© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

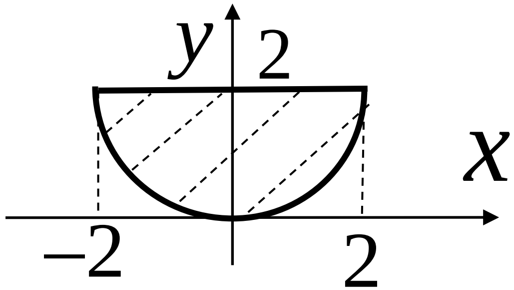
9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры Продолжение

8) Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 4 - y^2, \; z = 0,$$

$$y = 2, \; y = \frac{x^2}{2}.$$





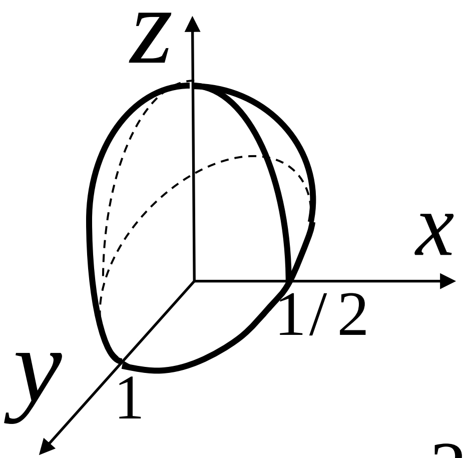
$$V = 2\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{2} \left(4 - y^2\right) dy = 2\int_0^2 dx \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{2} =$$

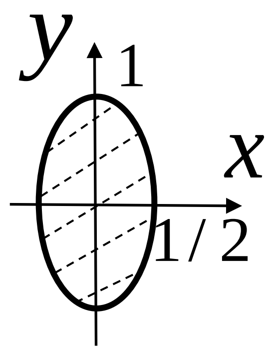
$$= 2\int_0^2 \left(8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right) dx = 2\left(\frac{16}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{21}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016

9.3 Вычисление двойных интегралов. Примеры
Продолжение

9) Найти объем тела, ограниченного поверхностями:





$$z = 1 - 4x^2 - y^2, \;\; z = 0,$$

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

$$V = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \left(1 - 4x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \left|2x = \sin t\right| =$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

© В.И. Бутырин, Э.Б. Шварц, 2016