

Семинар 13

12.1.6. Линейные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, называется **линейным** (неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно) **неоднородным** (в правой части содержится функция, зависящая от независимой переменной x) **дифференциальным уравнением**.

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: **метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной) и **метод Бернулли** (метод замены переменной).

Оба метода сводят решение данного дифференциального уравнения к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнение* (правая часть тождественно равна нулю)

$$y' + p(x)y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Общее решение уравнения $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Пусть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией $C = C(x)$,

т.е. $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Найдем производную $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} p(x)$
и подставим в исходное уравнение y и y' .

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Здесь **контрольная точка** (второе и третье слагаемые должны сократиться). Тогда

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Общее решение

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1,$$

где C_1 - произвольная постоянная.

Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right).$$

Метод Бернулли (метод замены переменной)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение y и y' . Получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Потребуем, чтобы функция v была такой, чтобы выражение $(v' + p(x)v)$ тождественно равнялось нулю.

Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными

$$v' + p(x)v = 0 \quad \text{и} \quad u'v = q(x).$$

Решим их последовательно.

$$1) \quad v' + p(x)v = 0, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x) dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x) dx, \quad v = e^{-\int p(x) dx}.$$

$$2) \quad u'v = q(x), \quad u'e^{-\int p(x) dx} = q(x),$$

$$du = q(x)e^{\int p(x) dx} dx, \quad u = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C,$$

$$\text{Итак, } y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C \right).$$

Такое же решение получено методом Лагранжа.

12.1.7. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \\ m \neq 0, m \neq 1.$$

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: метод Лагранжа и метод Бернулли.

Оба метода сводят решение уравнения Бернулли к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 75. Решить задачу Коши

$$3(xy' + y) = xy^2, \quad m = 2, \quad y(1) = 3.$$

Пример 75. (продолжение)

Решение. Данное уравнение есть уравнение Бернулли.

Используем метод Лагранжа: $xy' + y = 0$.

$$x \frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad y = \frac{C}{x}.$$

Пусть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией переменной x , т.е.

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Пример 75. (продолжение)

Подставим y и y' в дифференциальное уравнение:

Тогда

$$3 \left(x \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} \right) = x \frac{C^2(x)}{x^2},$$

Контрольная точка: Второе и третье слагаемые должны сократиться

$$3C'(x) = \frac{C^2(x)}{x}.$$

Данное уравнение есть уравнением с разделяющимися переменными

$$3 \int \frac{dC(x)}{C^2(x)} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1, \quad -3 \frac{1}{C(x)} = \ln |C_1 x|. \quad C(x) = -\frac{3}{\ln |C_1 x|}.$$

Пример 75. (продолжение)

Тогда

$$y = -\frac{3}{x \ln |C_1 x|}.$$

Решим задачу Коши

$$3 = -\frac{3}{\ln |C_1|}, \quad \ln |C_1| = -1,$$

$$C_1 = e^{-1}.$$

Ответ

$$y = -\frac{3}{x(\ln |x| - 1)}.$$

Пример 76. Решить задачу Коши

$$3(xy' + y) = xy^2, \quad m = 2, \quad y(1) = 3.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение есть уравнение Бернулли. Используем метод Бернулли.

Сделаем подстановку $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$.

$$3xi'v + 3xiv' + 3iv = xi^2v^2, \quad 3xi'v + 3i(xv' + v) = xi^2v^2.$$

а) Потребуем, чтобы $xv' + v = 0$.

Данное дифференциальное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Пример 76. (продолжение)

$$\text{б) } 3xu'v = xu^2v^2, \quad 3xu' \frac{1}{x} = xu^2 \frac{1}{x^2}, \quad 3u' = \frac{u^2}{x}.$$

Данное дифференциальное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$3 \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрируем

$$3 \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad -3 \frac{1}{u} = \ln |Cx|,$$
$$u = -\frac{3}{\ln |Cx|}.$$

Подставим v и u в общее решение дифференциального уравнения. Получим

$$y = -\frac{3}{x \ln |Cx|}.$$

Пример 76. (продолжение)

Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения

$$3 = -\frac{3}{\ln|C|}, \quad \ln|C| = -1, \quad C = e^{-1}.$$

Ответ

$$y = -\frac{3}{x(\ln|x|-1)}.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана 3954, 4044, 3962, 3965, 3967,
4042

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Дифференциальные уравнения»: Задачи 2, 3
2. Задачи из Бермана: Занятие 15