Семинар 28
13.5.2. Комплексная форма ряда Фурье
13.5.2.1. Комплексная форма ряда Фурье 2π - периодических функций

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (2.1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Равенство называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n - ***комплексными коэффициентами ряда Фурье***.

На случай комплексной формы переносятся все свойства, полученные для обычных рядов.

Прежде всего это:

Теорема Дирихле. Если 2π - периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна, то соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке.

Отметим, что при разложении четных и нечетных 2π – периодических функций удобнее использовать ***действительную*** форму ряда Фурье.

13.5.2.2. Случай произвольного периода функции

Если $2l$ – периодическая функция $f(x)$ задается на промежутке $(-l;\ l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \qquad (2.2)$$

а коэффициенты вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (2.3)$$

13.5.2.3. Примеры разложения функций в ряд Фурье в комплексной форме

Пример 144. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = \exp(x)$ на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Решение. Функция $f(x) = \exp(x)$ непрерывна и не имеет экстремумов на отрезке $(-\pi, \pi]$. Рассмотрим функцию на интервале $(-\pi, \pi)$. На этом интервале функция удовлетворяет условиям Дирихле.

Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Тогда ее период равен T=2π. Найдем коэффициенты разложения

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx=$$

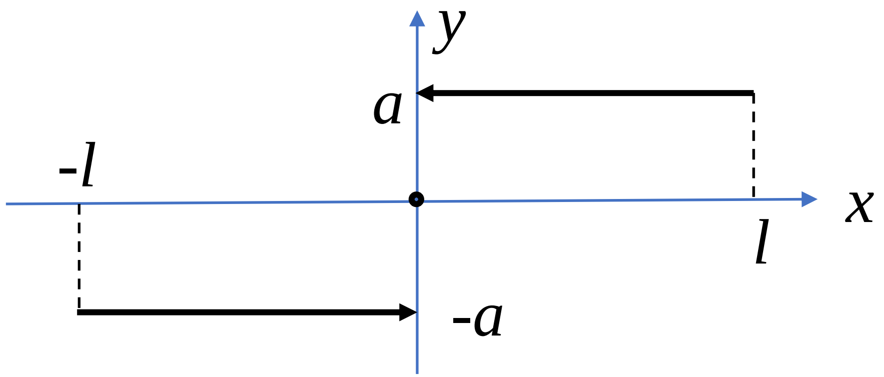
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi\cdot(1-in)}\left(e^{(1-in)\cdot\pi}-e^{-(1-in)\cdot\pi}\right)=$$

$$=\left|e^{-i\pi n}=e^{i\pi n}=(-1)^n\right|=\frac{1}{2\pi\cdot(1-in)}\left(e-e^{-1}\right)(-1)^n=\frac{\operatorname{sh}1\cdot(-1)^n}{\pi\cdot(1-in)}.$$

Ответ.

$$y=\frac{\operatorname{sh}1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}.$$

Пример 145. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию $y = a\,\mathrm{sign}\,x$ на отрезке $(-l, l]$.



Решение. Функция $y = a\,\mathrm{sign}\,x$ кусочно-непрерывна и не имеет экстремумов на отрезке $(-l, l]$. Рассмотрим функцию на интервале $(-l, l)$. На этом интервале функция удовлетворяет условиям Дирихле.

Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Тогда ее период равен $T=2l$. Найдем коэффициенты разложения

$$c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cdot e^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx=\frac{a}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\operatorname{sign}x\cdot e^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx=-\frac{a}{2l}\int\limits_{-l}^{0}e^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx+\frac{a}{2l}\int\limits_{0}^{l}e^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx=$$

$$=\frac{a}{2i\pi n}e^{-\frac{i\pi nx}{l}}\Bigg|_{-l}^{0}-\frac{a}{2i\pi n}e^{-\frac{i\pi nx}{l}}\Bigg|_{0}^{l}=\frac{a}{2i\pi n}-\frac{a}{2i\pi n}e^{i\pi n}-\frac{a}{2i\pi n}e^{-i\pi n}+\frac{a}{2i\pi n}=$$

$$=\left|e^{-i\pi n}=e^{i\pi n}=(-1)^n\right|=\frac{a}{i\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{2a}{i\pi(2n-1)}=-\frac{2ia}{\pi(2n-1)},\quad (n\neq 0).$$

$$c_0=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{a}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\operatorname{sign}x\,dx=-\frac{a}{2l}\int\limits_{-l}^{0}dx+\frac{a}{2l}\int\limits_{0}^{l}dx=-\frac{ax}{2l}\Bigg|_{-l}^{0}+\frac{ax}{2l}\Bigg|_{0}^{l}=0-\frac{al}{2l}+\frac{al}{2l}-0=0.$$

Ответ.

$$y=-\frac{2ia}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{\frac{i\pi(2n-1)x}{l}}.$$

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задача 18