Семинар 27
13.5. Ряды и преобразование Фурье. Интеграл Фурье
13.5.1. Ряды Фурье
13.5.1.1. Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций. Теорема Дирихле

Теорема (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\pi)$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится для всех x на интервале $(-\infty,\infty)$ и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (***условия Дирихле***), то на интервале (-∞,∞) имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (*)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Замечания.

1. Равенство (*) может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi,\pi]$.

2. В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

3. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на интервале $(0,2\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (*), где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

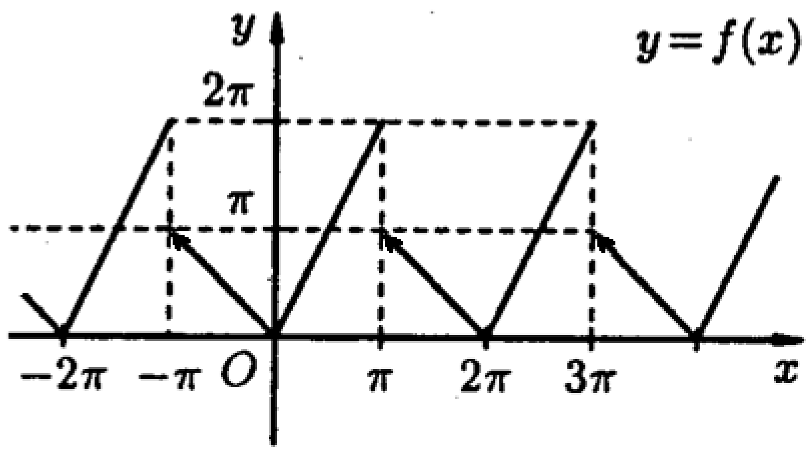
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегралы $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойств периодической функции.

Пример 139. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $(-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi; \\ -x, & \text{при} \quad -\pi<x\le 0. \end{cases}$$

Решение.



Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $(-\pi,\pi)$, значит она разложима в ряд Фурье.

Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x) \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x \cos nx\,dx =$$

$$\left(\textbf{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \right)$$

$$= \frac{-1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \dots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

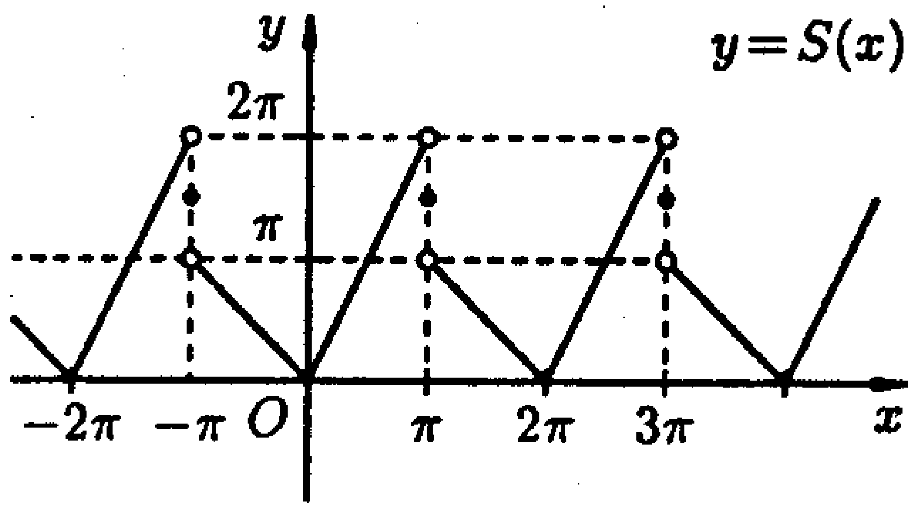
Ответ. Согласно теореме Дирихле, для интервалов $(-\pi+2k\pi;\ \pi+2k\pi)$ $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ имеем равенство

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) + $$
$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = \pi+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ сумма ряда $S(x)$ равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

График функции $S(x)$ имеет вид



13.5.1.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных 2π-периодических функций

Если 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале (-π,π) является ***четной*** или ***нечетной***, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится ***неполным***).

Теорема. Если 2π-периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая на интервале (-π,π) условиям Дирихле, на интервале (-π,π) четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если на интервале (-π,π) она нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

13.5.1.3. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом *T*=2*l*

Пусть задана периодическая функция $f(x)$, имеющая период $2l$ (где l - некоторое положительное число) и удовлетворяющая на интервале $(-l, l)$ условиям Дирихле.

Ряд Фурье для этой функции имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right).$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера - Фурье:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots.$$

Замечание.
Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π - периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$.

В частности, если $f(x)$, удовлетворяющая на интервале $(-l, l)$ условиям Дирихле, на интервале $(-l, l)$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

если та же функция $f(x)$ на интервале $(-l,l)$ нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

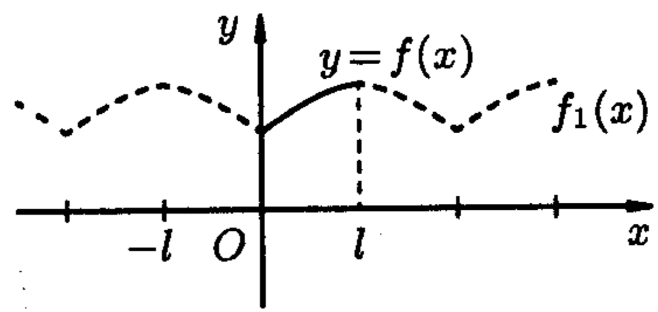
где $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

13.5.1.4. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть непериодическую функцию $f(x)$ заданную на отрезке $[0,l]$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0,l]$.

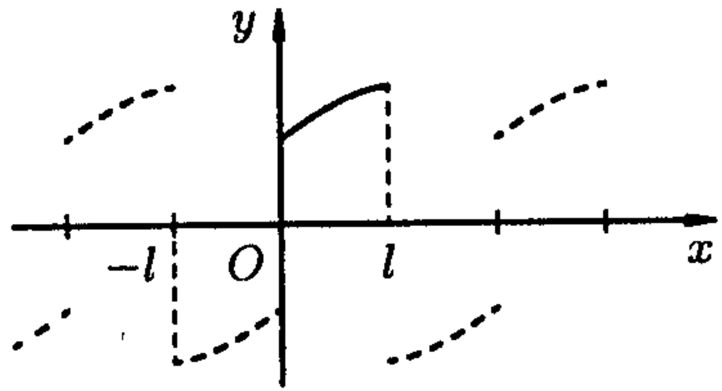
Такую функцию можно произвольным образом доопределить на интервале $(-l,0)$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на интервале $(-l,0)$ четным образом



В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы.

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $(-l,0)$ нечетным образом



то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов.

13.5.1.5. Примеры разложения функции в ряд Фурье

Пример 140. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, на отрезке $[-\pi,\pi]$ и построить график.

Решение. Очевидно, что функция $y = x$ на интервале $(-\pi,\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Продолжим ее периодически на всю числовую ось. $T = 2\pi$. Эта функция на интервале $(-\pi,\pi)$ нечетная. Следовательно, $a_n = 0, \quad n = 0,1,\dots$,

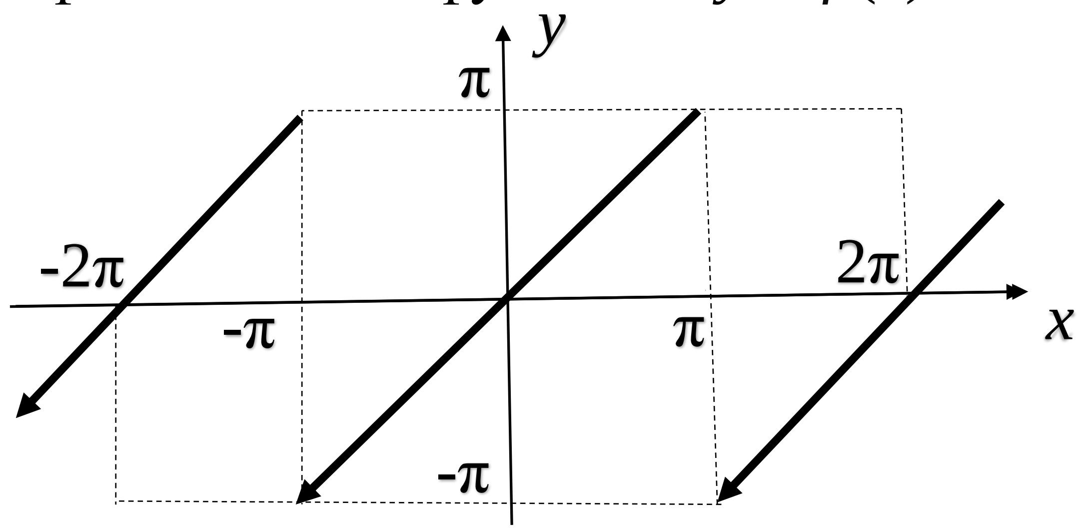
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

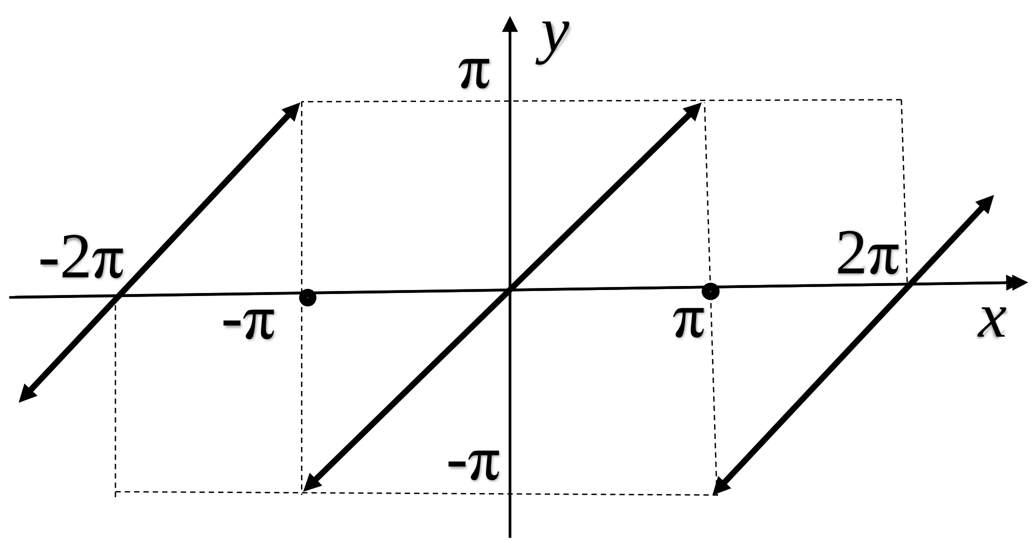
$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

При этом $$S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

Ответ. График заданной функции $y = f(x)$



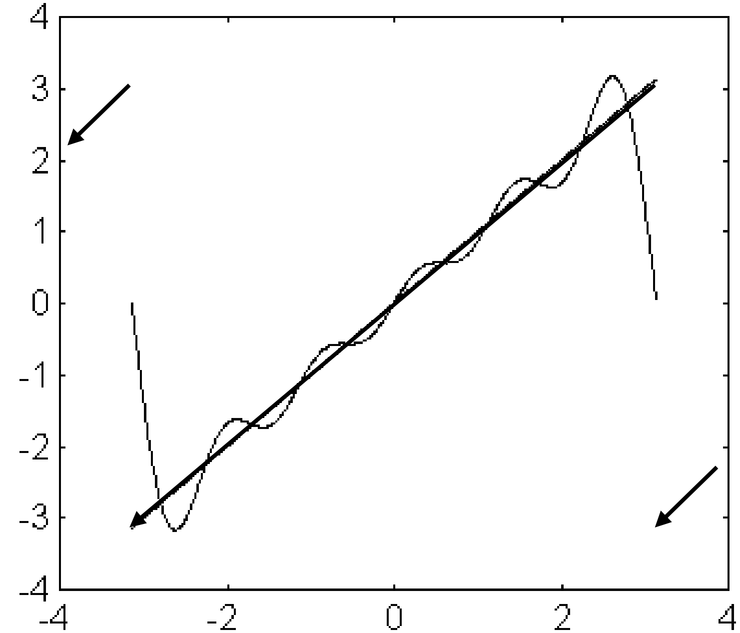
и соответствующего ряда $y = S(x)$



Ряд Фурье для функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет вид

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \ldots\right]$$

Если ограничиться конечным числом членов ряда ($n = 5$), то график его будет следующим на отрезке $[-\pi,\pi]$:



В точках $x = \pm\pi$ (на концах отрезка) ряд Фурье сходится к нулю и не совпадает со значениями функции

$$f(x)\Big|_{x=\pm\pi} = \pi.$$

Пример 141. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке [-4;4] в ряд Фурье.

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле на интервале (-4;4). Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Эта функция на интервале (-4;4) нечетная. $T=2l=8$.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4}, \qquad b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычислим коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

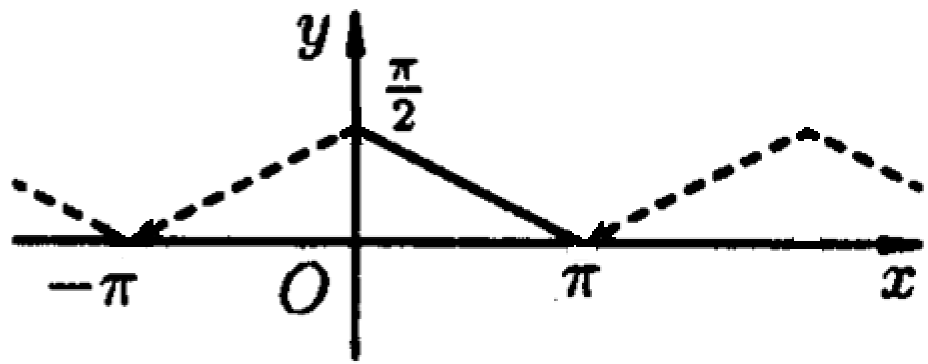
$$= -\frac{8}{\pi n}\cos \pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right) \quad \text{для } -4 < x < 4$$

Пример 142. Разложить в ряд косинусов функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}, \quad \text{на отрезке } 0\le x\le\pi.$$

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок (-π,0) четным образом.



Разложим в ряд функцию

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0\le x\le\pi,\\[2mm] \dfrac{\pi+x}{2}, & \text{если } -\pi<x<0.\end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ на интервале $-\pi < x < \pi$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле

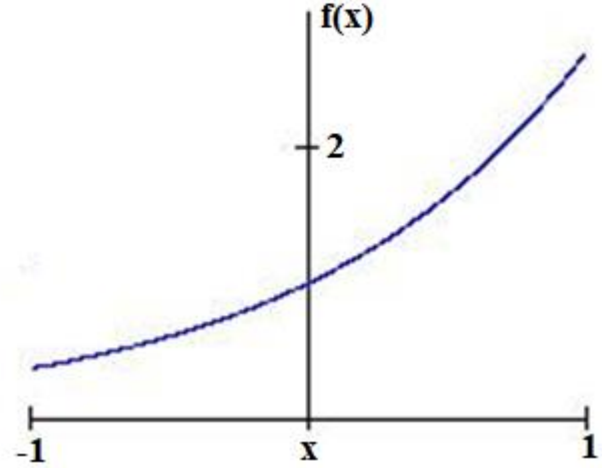
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n).$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

$$0 \le x \le \pi.$$

При этом $S(0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, $S(\pm\pi) = \dfrac{0+0}{2} = 0$

Пример 143. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \exp(x)$ на отрезке [-1;1] построить ее график в среде Mathcad.



Решение. Функция $f(x) = \exp(x)$ непрерывна и не имеет экстремумов на отрезке [1;1]. Рассмотрим функцию на интервале (-1;1). На этом интервале функция удовлетворяет условиям Дирихле. Продолжим ее периодически на всю числовую ось. Тогда ее период равен T=2.

Найдем аналитически коэффициенты Фурье

$$\frac{1}{L}\cdot\left(\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx\right)\rightarrow \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}+\exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

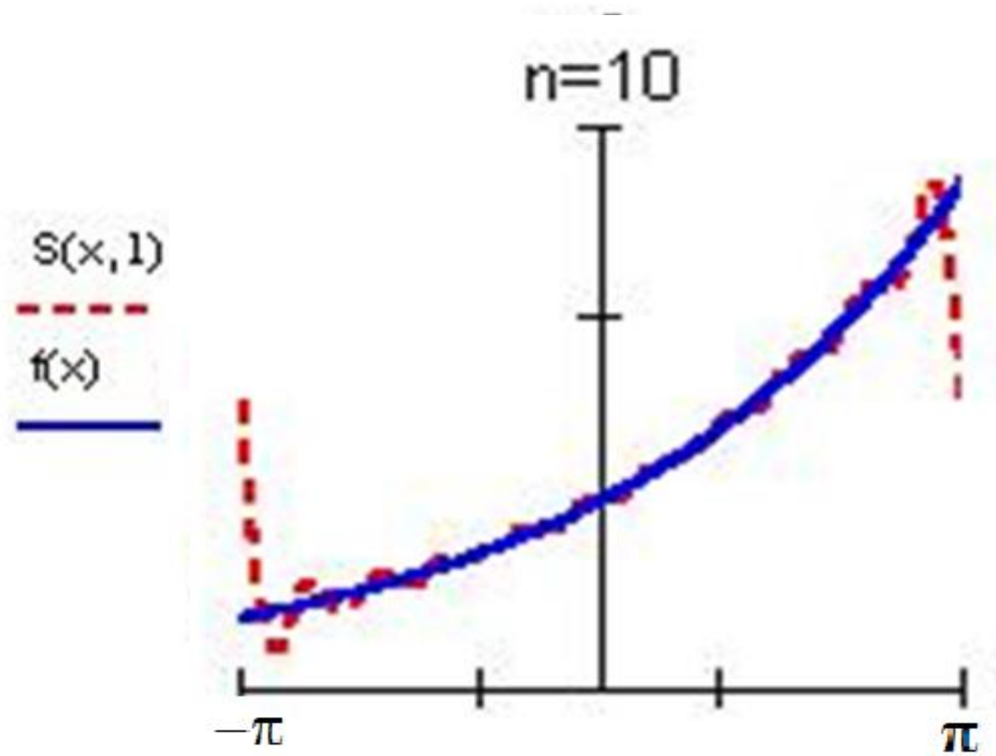
$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx\rightarrow \frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$a(k):=\exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}+\exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$b(k):=\frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

Ответ. Определим частичные суммы и построим графики функции для разных значений *n*:

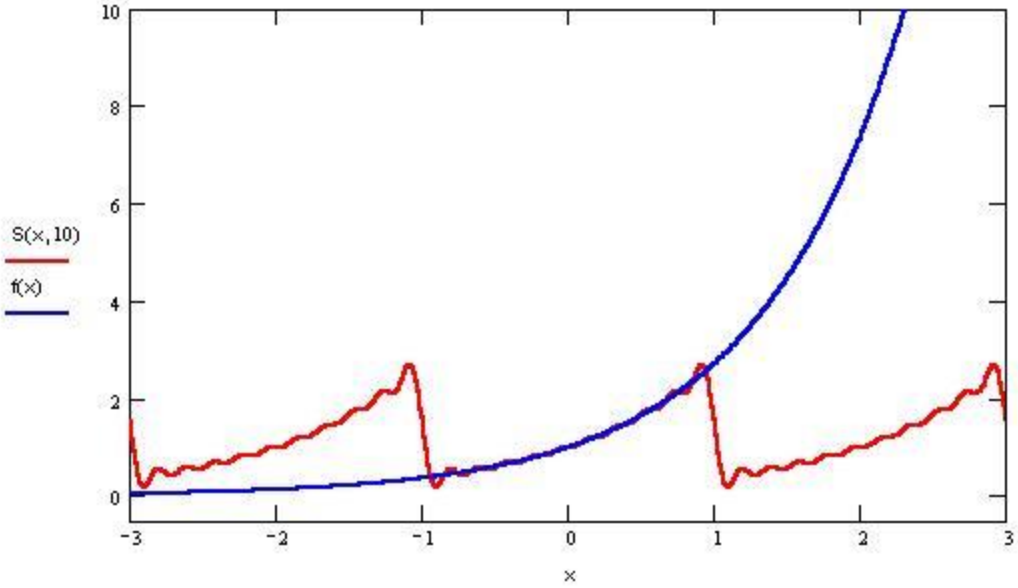
$$S(x,n) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a(k)\cdot\cos(k\cdot\pi\cdot x) + b(k)\cdot\sin(k\cdot\pi\cdot x)\right)$$



Замечания.

1.Ряд Фурье сходится к данной функции только на заданном отрезке.

2.Сумма ряда является периодической функцией и вне отрезка может совсем не совпадать с данной функцией



Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 4372, 4373, 4385, 4391

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задача 17