Семинар 26
13.4. Разложение функций в степенные ряды
13.4.1 Ряд Тейлора

Определение. ***Рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (*)$$

относительно разности $(x-x_0)$, коэффициенты которого a_n выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0.

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- ***коэффициенты Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание: Если $x_0=0$, то ряд называют ***рядом Маклорена***.

Пример 130. Разложить функцию $f(x)=-3+x-x^2+2x^3$ по степеням $(x-1)$ $x_0=1$.

Решение.

$$f(1)=-1,\ \ f'(1)=\left(1-2x+6x^2\right)\Big|_{x=1}=5,\ \ f''(1)=(-2+12x)\Big|_{x=1}=10,$$

$$f'''(1)=12,\quad f^{(4)}(1)=\ldots=0.$$

$$-3+x-x^2+2x^3=-1+\frac{5}{1!}(x-1)+\frac{10}{2!}(x-1)^2+\frac{12}{3!}(x-1)^3=$$

$$=-1+5(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3.$$

Ответ. $-3+x-x^2+2x^3=-1+5(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3.$

13.4.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Разложение функций проводится в три этапа:

1) Вычисляются значения функции и ее производных

$$f(x_0),\ldots, f^{(n)}(x_0),\ldots .$$

2) Составляется ряд Тейлора.

3) Находится интервал, где ряд Тейлора сходится, т. е.

$$R_n(x)\to 0.$$

Особенно часто при разложении функций в степенной ряд используют ряд Маклорена

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}x^{n}.$$

В справочниках даны разложения в этот ряд и область сходимости ряда.

13.4.4.1. Разложение функций в ряд Маклорена

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

В частности для $x = 1$ $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

2. $$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Замечание. Нечетные функции раскладываются по нечетным степеням. Четные функции раскладываются по четным степеням.

4. $f(x)=(1+x)^m$, где m - любое число.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots$$

Ряд сходится при $|x|<1$.

Ряд расходится при $|x|>1$.

5. $$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1].$$

6. $$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in[-1,1].$$

7. $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1.$$

13.4.4.2. Примеры разложения функций в ряд Маклорена

Пример 131. Разложить функцию e^{-x} в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^{x} в ряд Маклорена

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Подставим в эту формулу $-x$ вместо x.

Ответ. $$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Пример 132. Разложить функцию $\operatorname{ch} x$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением функций e^x и e^{-x} в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Тогда

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ответ.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Аналогично можно получить и другие формулы разложения функций в ряд Маклорена, например:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

13.4.5. Приближенное вычисление значений функций

Пусть функция $f(x)$ представима рядом Тейлора в окрестности точки x_0. Тогда точное значение функции можно вычислить по ряду Тейлора, а приближенное значение по частичной сумме. Ошибку можно оценить по остатку ряда $R_n(x)$. Рассмотрим на примерах.

Пример 133. Вычислить значение e с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение. Представим e^x рядом Маклорена

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x). \qquad \forall x \in [0, M] \quad \forall n \quad f^{(n)}(x) \le e^M .$$

По теореме об оценке остаточного члена ряда

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $M = 1$

$$R_n(x) < e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 8.$$

Ответ.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2,71828.$$

Пример 134. Сколько членов ряда Маклорена нужно учесть, чтобы аппроксимировать функцию $\sin x$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Представим функцию $\sin x$ рядом Маклорена

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

При $n = 1$, $\sin x \approx x$ остаточный член оценивается по формуле

$$\left| R_1(x) \right| < \frac{|x|^3}{6} \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$|x|^3 \leq 6\varepsilon = 0.006 \Rightarrow |x| \leq 0.08 \Rightarrow |x| \in [0; 0.08).$$

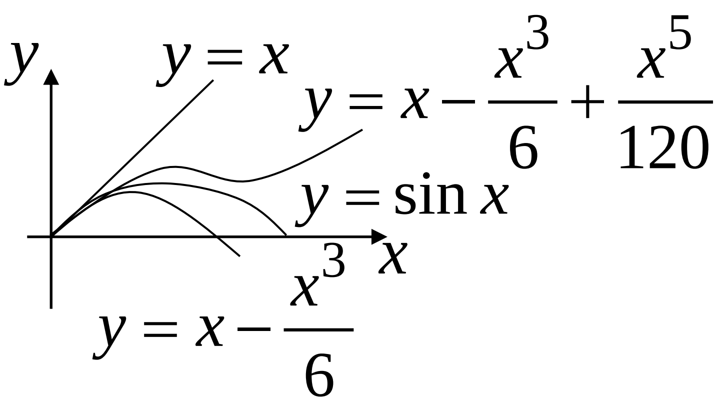
Следовательно, аппроксимация $n = 1$, $\sin x \approx x$ обеспечивает точность отработки функции на интервале $|x| \in [0; 0.08)$.

Аналогично можно показать, что

$$n=2,\ \ \sin x \approx x-\frac{x^3}{6},\quad \left|R_2(x)\right|<\frac{|x|^5}{120}\le \varepsilon,\ \ |x|\in[0;0.4).$$

$$n=3,\ \ \sin x \approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\quad \left|R_3(x)\right|<\frac{|x|^7}{5040}\le \varepsilon,\ \ |x|\in[0;0.9).$$

Ответ.



$$n=1,\ \ |x|\in[0;0.08).$$

$$n=2,\ \ |x|\in[0;0.4).$$

$$n=3,\ \ |x|\in[0;0.9).$$

Пример 135. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,000001$.

Решение. А) Представим $\ln 2$ в виде ряда Маклорена

$$\ln 2 = \ln(1+x) = |x=1| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad x \in (-1,1].$$

Ряд сходится, но очень плохо. Из теоремы Лейбница видно, что для обеспечения точности необходимо учесть $n = 100000$ членов ряда.

Покажем как улучшить сходимость.

Б)

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1].\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1).$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\quad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1+x}{1-x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}+\ldots\right).\qquad n=4.$$

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\frac{1}{3^9}\right)\approx 0,693144.$$

Ответ. $\ln 2\approx 0,693144.$

13.4.6 Интегрирование функций

Найти

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Пусть известно разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора и пределы интегрирования лежат в интервале сходимости ряда. Тогда можно интегрировать почленно. В итоге получим ряд для функции $F(x)$, имеющий тот же интервал сходимости, что и исходный.

Если интеграл выражается через элементарную функцию, то получим ее разложение в ряд Тейлора. Если функция $F(x)$ в элементарных функциях не выражается, то найдем разложение неэлементарной функции в ряд Тейлора.

Зная оценку $R_n(x)$ для подынтегральной функции, можно получить оценку $R_n^*(x)$ для $F(x)$.

Пример 136. Представить интегральный синус $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$. рядом Маклорена

Решение.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}, \quad x \in \left(-\infty, \infty\right).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2n-2}}{\left(2n-1\right)!}, \; x \in \left(-\infty, \infty\right).$$

Ответ.

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \ldots, \; x \in \left(-\infty, \infty\right).$$

Полученный ряд не сходится ни к какой элементарной функции.

13.4.7. Некоторые задачи

Пример 137. Найти первые четыре члена разложения в ряд Тейлора решения дифференциального уравнения

$$y'' = x\sin y', \quad y'\big|_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \quad y\big|_{x=1} = 0.$$

Решение. Решение представимо в виде

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad x_0 = 1.$$

$$y'' = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad y''' = \sin y' + x\cdot\cos y'\cdot y'' = \sin\frac{\pi}{2} + 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot 1 = 1.$$

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots .$$

Ответ. $$y = 0 + \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Пример 138. Ряд Тейлора в окрестности точки -1:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n!}.$$

Найти $f'''(-1)$.

Решение. Общий вид ряда Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad x_0=-1.$$

Третья производная при n=3.

$$f'''(-1)=2^n=2^3=8.$$

Ответ.

$$f'''(-1)=8.$$

Работа в аудитории

Задачи из Бермана: 2841, 2844, 2856, 2860, 2863, 2866, 2870

Домашнее задание

1. Типовой расчет «Ряды. Ряды Фурье». Задачи 8, 9
2. Задачи из Бермана. Занятие № 27 (кроме дополнительной задачи)